الطريق إلى النجاح

كل ما يجب أن تعرفه لإجتياز امتحان الرياضيات بالجهوي بنجاح..

ملخصات مركزة مرفقة بأمثلة..

- ✓ مسلك الآداب و العلوم الإنسانية.
- ✓ مسلك التعليم الأصيل.

أولى آداب

من إعداد و تأليف الأستاذ : **بدر بوصفيحة**

إن الحمد لله، نحمده و نستعينه و نستهديه و نعوذ بالله من شرور أنفسنا و من سيئات أعمالنا، فمن يهده الله فلا مضل له، و من يضلل فلا هادي له.

أما بعد:

أعزائي التلاميذ،عزيزاتي التلميذات،**أولى باكالوريا آداب** ، أهدي إليكما هذا العمل البسيط الذي يحتوي على جميع المعارف الرياضية التي يجب على كل تلميذ(ة) معرفتها لاجتياز الامتحان الجهوي لمادة الرياضيات بتفوق و نجاح.

أرجو صادقا من خلال هذا العمل المتواضع أن أكون قدمت لكما وسيلة تعليمية نوعية من شأنها الرفع من مستواكما التعليمي في مادة الرياضيات و إغناء قدراتكما فيه.

و نسأل الله أن يوفقكما إلى الخير و السداد

المؤلف.

في انتظار *آرائكم* و افكاركم و *اقتراحاتكم* حول هذا العمل...

bousfiha1@gmail.com

مبادئ في المنطق

العبارة:

العبارة هي كل جملة خبرية تحمل معنى قد يكون صحيحا أو خاطئا، ولا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في آن واحد.

مثال:

العبارة " $10 = 3 * 4$" عبارة خاطئة.

جدول حقيقة بعض العبارات:

P	Q	$\overline{P}$	P و Q	P أو Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V

التناسبية و الخريطة والسلم

الزيادة:

إذا كان x هو الكمية و $t\%$ نسبة الزيادة، فإن الكمية بعد عملية الزيادة هي : $x(1+\frac{t}{100})$

مثال:

ثمن سلعة 320 درهم ، و 2.5% هي نسبة الزيادة ، اذن الثمن الجديد بعد عملية الزيادة هو: $320 * \left(1+\frac{2.5}{100}\right) = 328\ dhs$

التخفيض:

إذا كان x هو الكمية و $t\%$ نسبة التخفيض، فإن الكمية بعد عملية التخفيض هي : $x(1-\frac{t}{100})$

مثال:

ثمن سلعة 430 درهم ، و 3% هي نسبة التخفيض ، اذن الثمن الجديد بعد عملية التخفيض هو: $430*\left(1-\frac{3}{100}\right)=417.1dhs$

الخريطة و السلم (مثال):

مساحة شقة $140m^2$. لحساب هذه الشقة على تصميم بسلم $\frac{1}{100}$، نضرب المساحة الحقيقية في المعامل $(\frac{1}{100})^2$

إذن المساحة على التصميم هي: $\frac{1}{10000}*140=0.014m^2$

إشارة الحدانية $ax+b$: $(a\neq 0)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	إشارة a	

مثال:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$	

المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد: ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

لحل هذا النوع من المعادلة، نتبع الخطاطة التالية:

أولا

نحسب المميز Δ : $\Delta=b^2-4ac$

- $\Delta=0$: المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $\frac{-b}{2a}$
- $\Delta>0$: المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta<0$: المعادلة ليست لها حل في IR

مثال 1 $(\Delta = 0)$

$\boxed{a = 1}$

حل في IR المعادلة: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$\boxed{b=-4}$ $\boxed{c=+4=4}$

$\boxed{b^2 - 4ac}$

لنحسب المميز Δ: $\Delta = (-4)^2 - 4 * 1 * 4 = 16 - 16 = 0$

$\boxed{-\frac{b}{2a}}$

إذن $\Delta = 0$ ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو : $-\frac{(-4)}{2} = 2$

مثال 2 $(\Delta > 0)$

$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

حل في IR المعادلة: $4x^2 - 9x + 1 = 0$

لنحسب المميز Δ: $\Delta = (-9)^2 - 4 * 4 * 4 = 65$

إذن $\Delta > 0$ ، ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين هما : $x_1 = \frac{9-\sqrt{65}}{8}$ و $x_2 = \frac{9+\sqrt{65}}{8}$

و بالتالي $S = \{\frac{9-\sqrt{65}}{8} ; \frac{9+\sqrt{65}}{8}\}$

مثال 3 $(\Delta < 0)$

حل في IR المعادلة: $2x^2 + x + 6 = 0$

لنحسب المميز Δ: $\Delta = (1)^2 - 4 * 2 * 6 = -77$

إذن $\Delta < 0$ ، ومنه المعادلة ليس لها حل في IR

أي $S = \{\emptyset\}$

إشارة و تعميل ثلاثية الحدود : $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

نعتبر الحدودية : $P(x) = ax^2 + bx + c$

المميز		حل المعادلة $P(x) = 0$		تعميل $P(x)$
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$S = \{\emptyset\}$	x : $-\infty$ … $+\infty$ $P(x)$: إشارة a	غير ممكن
	$\Delta = 0$	$S = \{\frac{-b}{2a}\}$	x : $-\infty$, $\frac{-b}{2a}$, $+\infty$ $P(x)$: إشارة a , 0 , إشارة a	$P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$
	$\Delta > 0$	$S = \{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$	x : $-\infty$, x_1 , x_2 , $+\infty$ $P(x)$: إشارة a , 0 , عكس إشارة a , 0 , إشارة a (نفترض أن $x_1 < x_2$)	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

مثال:

حل في IR المتراجحة : $x^2 - x - 12 \geq 0$

أولا: نحسب مميز المعادلة $x^2 - x - 12 = 0$ ، لدينا : $\Delta = 1 + 47 = 49$

بما أن $\Delta > 0$ ، فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما : $x_1 = \frac{(-1)-\sqrt{49}}{2} = \frac{1-7}{2} = -3$

و $x_2 = \frac{(-1)+\sqrt{49}}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$

ثانيا: ندرس اشارة ثلاثية الحدود $x^2 - x - 12$ ، كما يلي :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

في هذاالمثال نبحث عن إشارة + في الجدول ثم نقرأ مجموعة الحلول

تالثا: نستنتج مجموعة حلول المتراجحة : $x^2 - x - 12 \geq 0$ في IR من خلال الجدول أعلاه نستنتج أن :

النظمات- طريقة المحددة: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

أولا يجب حساب المحددة D :

$D = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b$

$D \neq 0$

النظمة لها حل وحيد (x, y) حيث:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix}}{D} = \frac{cb' - c'b}{D}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}}{D} = \frac{ac' - a'c}{D}$

$D = 0$

النظمة قد لا يكون لديها أي حل و قد يكون لها عدد منه من الحلول.

مثال: لنحل في IR^2 النظمة : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

لنحسب محددة النظمة: $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 * (-1) - 3 * 1 = -2 - 3 = -5$

بما أن $D \neq 0$ فإن النظمة تقبل حلا وحيدا (x, y) حيث:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-5} = -\frac{3}{5}$ و بالتالي حلول النظمة هي: $S = \{(\frac{7}{5}; \frac{-3}{5})\}$

المتطابقات الهامة: لكل عددين حقيقيين b و a

- ✓ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ✓ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ✓ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مثال:

$$(\mathrm{a}-3)^2 = \mathrm{a}^2 - 2*3*\mathrm{a} + 3^2$$

$$(a-3)^2 = a^2 - 6a + 9$$

مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي:	مجموعة تعريف الدالة f هي:
$f(x) = P(x)$	$D_f = IR$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in IR / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in IR / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in IR / Q(x) > 0\}$

أمثلة:

- ✓ $\mathbf{f}(x) = 3x^2 - 4x + 1$ مجموعة تعريفها هي: $\mathrm{D_f} = IR$ *لأنها دالة حدودية.*
- ✓ $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{3x-1}}$

$D_f = \{x \in IR / 3x - 1 \neq 0\}$ أي $D_f = \{x \in IR / 3x \neq 1\}$ و منه $D_f = \{x \in IR / x \neq \frac{1}{3}\}$

- ✓ $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{2x-1}}$

$D_f = \{x \in IR / 2x - 1 \geq 0\}$ أي $D_f = \{x \in IR / x \geq \frac{1}{2}\}$

	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

و بالتالي $D_f = [\frac{1}{2}; +\infty[$

الدالة الزوجية و الدالة الفردية:

لكي نبين أن f دالة زوجية، يجبب تحقق الشرطان التاليان:	لكي نبين أن f دالة فردية، يجبب تحقق الشرطان التاليان:
✓ لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ ✓ $f(-x) = f(x)$	✓ لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ ✓ $f(-x) = -f(x)$

أمثلة:

✓ $f(x) = 2x^2 + 2$. لنبين أن **f** دالة زوجية.

يجب دائما تحديد مجموعة تعريف الدالة f : $D_f = IR$ *لأن* **f** *دالة حدودية.*

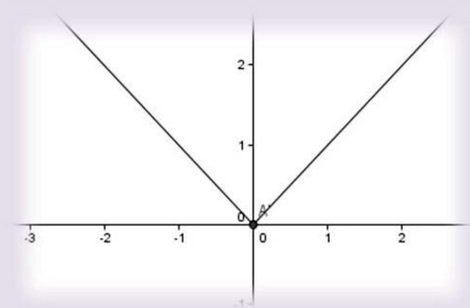
بما أن D_f *متماثل بالنسبة للعدد 0 ، فإن لكل* $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ ولدينا:

$f(-x) = 2(-x)^2 + 2 = 2x^2 + 2 = f(x)$ ، إذن f دالة زوجية.

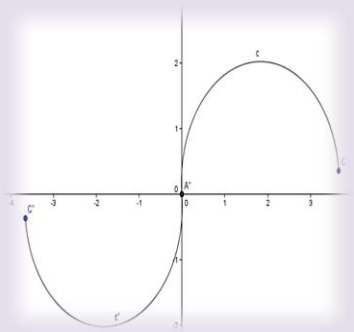
✓ $f(x) = x^3$. . لنبين أن **f** دالة فردية.

لدينا $D_f = IR$ ،*إذن* لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ و: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ، إذن f دالة فردية.

التمثيل المبياني للدالة الزوجية و الدالة الفردية:



الدالة الزوجية منحناها متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.



الدالة الفردية منحماها متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

الدالة المكبورة-الدالة المصغورة-الدالة المحدودة:

f مكبورة بالعدد M	f مصغورة بالعدد M	f محدودة
$\boldsymbol{f(x) \leq M}$	$\boldsymbol{f(x) \geq m}$	**مكبورة و محدودة** $\boldsymbol{m \leq f(x) \leq M}$

مثال:

$f(x) = -2x^2 + 3$ لنبين أن f دالة مكبورة بالعدد 3.

لكل $x \in IR$ ، لدينا $-2x^2 \leq 0$ و منه $-2x^2 + 3 \leq 3$ ، أي $f(x) \leq 3$ و بالتالي f مكبورة بالعدد 3.

معدل التغير و الرتابة: ليكن a و b من I

العدد $T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ يسمى معدل التغير.

$T \geq 0$

f تزايدية على I

$T \leq 0$

f تناقصية على I

مثال:

لندرس تغيرات الدالة $f(x) = x^2$ علىf $IR^+ = [0; +\infty[$

ليكن a و b من IR^+. $T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$ ، بما أن $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فإن $a+b \geq 0$ إذن

$T \geq 0$ و منه f تزايدية على IR^+.

المتتاليات:

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
كيف نبين أن (U_n) حسابية؟ $U_{n+1} = U_n + r$ r هو الأساس	**كيف نبين أن (U_n) هندسية؟** $U_{n+1} = U_n * q$ q هو الأساس
الحد العام: $U_n = U_p + (n-p)r \quad (p \leq n)$	**الحد العام:** $U_n = U_p * q^n \quad (p \leq n)$
مجموع حدود متتابعة: $S = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ $S = \frac{p-n+1}{2}(U_p + U_n)$ $S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$	**مجموع حدود متتابعة:** $S = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n$ $S = U_p * (\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q})$ $S = (\text{الحد الأول}) * (\frac{1-\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}})$
a و b وc ثلاث حدود متتابعة: $2b = a + c$	***a و b وc ثلاث حدود متتابعة:*** $b^2 = a * c$

مثال 1:

نعتبر المتتالية المعرفة ب: $U_n = 2n - 5$

لدينا: $U_{n+1} = 2(n+1) - 5 = 2n - 3$

إذن $U_{n+1} - U_n = 2n - 3 - (2n-5) = \cancel{2n} - 3 - \cancel{2n} + 5 = 2$

و بالتالي (U_n) متتالية حسابية أساسها 2.

مثال 2 :

نعتبر المتتالية المعرفة ب: $V_n = 3^n$. لنبين أن (V_n) حسابية؟

لدينا $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{\cancel{3^n}3}{\cancel{3^n}} = 3$ ، أي $V_{n+1} = 3V_n$ ، إذن $(V_n)_{n\in IN}$ متتالية هندسية أساسها 3.

مثال 3 :

$(U_n)_{n\in IN}$ متتالية حسابية حدها الأول $U_0 = 2$ و أساسها $r = \frac{3}{2}$

- ✓ لنحسب U_{20}: $U_n = U_0 + (20 * 0) * \frac{3}{2} = 2 + 20 * \frac{3}{2} = 2 + 30 = 32$
- ✓ لنحسب المجموع S حيث:
- ✓ $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{20} = \frac{20-0+1}{2}(U_0 + U_{20}) = \frac{21}{2} * (2+32) = \frac{31}{2} * 34 = 31 * 17 = 527$

التعداد

المبدأ العام للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا $(p \in IN^*)$

إذا كان الإختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة.

إذا كان الإختيار الأول يتم ب n_2 كيفية مختلفة.

....

إذا كان الإختيار الأول يتم ب n_p كيفية مختلفة.

فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1 * n_2 * n_3 * \dots n_p$

مثال: لدى شخص ربطتا عنق و 3 أقمصة و معطفان. عدد البدلات الممكنة هو : $2 * 3 * 2 = 12$

الأعداد : $n!$ و A_n^p و C_n^p

- ✓ $n! = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1$ $\quad n \in IN^*$
- ✓ $0! = 1$
- ✓ $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ و $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

s

مثال

$$6! = 6*5*4*3*2*1 = 720$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5*4*\cancel{3!}}{\cancel{3!}*2!} = 10$$

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6*5*4*3*\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360$$

أنواع السحب: نسحب p عنصر من بين n عنصر $(p \le n)$، نلخص النتائج في الجدول التالي:

نوع السحب:	عدد السحبات الممكنة:	الترتيب
تآنيا	C_n^p	غير مهم.
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم.
بالتتابع وبدون إحلال	A_n^p	مهم.

مثال:

نعتبر كيس يحتوي على 9 كرات منها : كرتان سوداوتان و 3 كرات حمراء و 4 كرات صفراء.

نسحب ثلاث كرات من الكيس، ما عدد السحبات الممكنة في الحالات التالية:

1) السحب التآني.
2) السحب بالتتابع و بإحلال.
3) السحب بالتتابع و بدون إحلال.

السحب التآني: كل سحبة تمثل تأليفة ل 3 عناصر من بين 9 عناصر، إذن عدد السحبات الممكنة هو: $C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$

السحب بالتتابع و بإحلال: حسب مبدأ العام للتعداد، عدد السحبات هو: $9^3 = 9*9*9 = 729$

السحب بالتتابع وبدون إحلال: كل سحبة تمثل ترتيبة ل 3 عناصر من بين 9 عناصر، إذن عدد السحبات الممكنة هو

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 9*8*7 = 504$$

النهايات

نهايات الدالة: $x \to x^n$ $(n \epsilon IN^*)$ **ومقلوباتها:**

- $\lim_{x\to 0} x^n = 0$
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

مثال: $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

إذا كان n زوجيا فإن:	إذا كان n فرديا فإن:
• $\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$	• $\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
• $\lim_{x\to -\infty} x^n = +\infty$	• $\lim_{x\to -\infty} x^n = -\infty$
• $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	• $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
• $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$	• $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

مثال:

- $\lim_{x\to +\infty} x^4 = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} x^5 = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^6} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^6} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^{-+}} \frac{1}{x^8} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^9} = -\infty$

نهاية الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال: $\lim_{x\to +\infty} 3x^6 - 2x^5 + 9x^2 - x + 5 = \lim_{x\to +\infty} 3x^6 = +\infty$

نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

مثال: $\lim_{x\to -\infty} \frac{9x^3 - 2x^2 + x - 1}{4x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{9x^3}{4x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{9x}{4} = -\infty$

العمليات على النهايات

نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$	$l+l'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

مثال: $\lim_{x\to 0^+} x^5 + \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0^+} x^5 + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = 0 + (+\infty) = +\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	l	$l<0$		$l>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to x_0} (f(x)*g(x))$	$l*l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

مثال: لنحسب $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)$

نعلم أن $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = 0$ إذن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1$

و بالتالي حسب الجدول أعلاه: $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-1\right) = +\infty * (-1) = -\infty$

نهاية خارج دالتين:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	l	l	$l<0$		$l>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$l'(l'\neq 0)$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	شكل غير محدد

مثال: لنحسب $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2+1}{x+1}$

لدينا : $\lim_{x\to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$ و $\lim_{x\to 1} 3x^2 + 1 = 3 * 1^2 + 1 = 3 + 1 = 4$

إذن: $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2+1}{x+1} = \frac{4}{5} = 2$

ملاحظة هامة: هذه النهايات السابقة تبقى صالحة عند x_0 على اليمين و x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند

الإشتقاق

قابلية الإشتقاق في عدد:

نقول إن f دالة قابلة للإشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية (أي تخالف $\pm\infty$)

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 و يرمز له بالرمز $f'(x)$

مثال: تعتبر الدالة f المعرفة على IR ب : $f(x) = x^2 - 1$

لندرس قابلية الإشتقاق الدالة f في النقطة 2 :

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-1-(2^2-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4 = f(2)$$

متطابقة
هامة

معادلة المماس لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 ، معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي:

$$\mathbf{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على IR ب : $f(x) = x^2 - 1$ (المثال السابق).

راجع المثال السابق

معادلة المماس ل (C_f) في 2 هي:

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + (2^2 - 1) = 4x - 8 + 3 = 4x - 3$$

جدول مشتقات لعض الدوال الإعتيادية:

f(x)	(المشتقة)$f'(x)$
a	0
x	1
ax	a
x^n	nx^{n-1}

أمثلة:

- ✓ $f(x) = 3$ <= $f'(x) = 0$
- ✓ $f(x) = x$ <= $f'(x) = 1$
- ✓ $f(x) = 3x$ <= $f'(x) = 3$
- ✓ $f(x) = x^7$ <= $f'(x) = 7x^6$

العمليات على الدوال المشتقة:

$(u+v)' = u' + v'$
$(u-v)' = u' - v'$
$(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

مثال 1: $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 + x - 1$

الدالة f هي مجموع خمس دوال قابلة للإشتقاق على IR

$$f'(x) = (x^5)' + (-2x^4)' + (3x^2)' + (x)' + (-1)'$$

إذن : $f(x) = 5x^4 - 2 * 4x^4 + 3 * 2 * x \quad + 1 = 5x^4 - 8x^3 + 6x + 1$

مثال 2: $f(x) = (x^3 - 3)(x^3 + 1)$

لدينا: $f'(x) = (x^3 - 3)'(x^3 + 1) + (x^3 - 3)(x^3 + 1)' = 2x(x^3 + 1) + (x^2 - 3)(x^3 + 1)$

أي: $f'(x) = 2x^4 + 2x + 3x^4 - 9x^2 = 5x^4 - 9x^2 + 2x$

الإشتقاق و تغيرات دالة:

- ✓ $\forall x \in I \; f'(x) \geq 0 \quad <=> \quad f$ تزايدية على المجال I
- ✓ $\forall x \in I \; f'(x) \leq 0 \quad <=> \quad f$ تناقصية على المجال I
- ✓ $\forall x \in I \; f'(x) = 0 \quad <=> \quad f$ تابثة على المجال I

مثال: :نعتبر الدالة f المعرفة على IR ب : $f(x) = x^3 - 1$

إذن: $f'(\quad) = 3x^2$ و بما أن: $x^2 \geq 0$ فإن $f'(x) \geq 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال IR

الفهرس