Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une entreprise qui fabrique des tables en bois, plusieurs études sont faites.

Dans les parties A et B, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie A

L'entreprise utilise un lot de $\mathbf{12}$ planches en bois pour la fabrication de chaque table.
Une planche est dite fragilisée quand elle présente un noeud dans le bois. La probabilité qu'une planche soit fragilisée est de $\mathbf{0,05}$.
On note $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire représentant le nombre de planches fragilisées d'un lot de $\mathbf{12}$ planches choisi au hasard pour la fabrication d'une table.

I-A-1- $\boldsymbol{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$. Donner les valeurs de $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$.

I-A-2- Donner la probabilité $\boldsymbol{P_1}$ que le lot ne comporte aucune planche fragilisée.

I-A-3- Donner la probabilité $\boldsymbol{P_2}$ que le lot comporte une seule planche fragilisée.

I-A-4- Donner la probabilité $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \geqslant \mathbf{2})$ que le lot comporte au moins deux planches fragilisées.

Partie B

Les planches utilisées pour la fabrication des tables sont débitées par une machine réglée pour produire des planches d'une longueur de $\mathbf{980}$ millimètres.
La longueur, en millimètres, d'une planche prise au hasard à la sortie de la machine est modélisée par une variable aléatoire $\boldsymbol{L}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mathbf{980}$ et d'écart-type $\mathbf{2}$.

I-B-1- Donner la probabilité $\mathbb{P}(\mathbf{978} \leqslant \boldsymbol{L} \leqslant \mathbf{982})$ que la longueur de la planche soit comprise entre $\mathbf{978}$ et $\mathbf{982}$ millimètres.

I-B-2- Donner la probabilité $\mathbb{P}(\boldsymbol{L} \leqslant \mathbf{978})$ que la planche mesure moins de $\mathbf{978}$ millimètres.

I-B-3- Donner la probabilité $\mathbb{P}(\boldsymbol{L} \geqslant \mathbf{982})$ que la planche mesure plus de $\mathbf{982}$ millimètres.

Partie C

Toutes les tables sont peintes avant d'être mises en vente. Mais elles peuvent présenter un défaut de peinture sur le plateau ou sur les pieds de table.
On considère que $\mathbf{3\%}$ des tables mises en vente présentent un défaut de peinture sur le plateau, $\mathbf{4\%}$ présentent un défaut de peinture au niveau des pieds et $\mathbf{2\%}$ présentent les deux défauts à la fois. On choisit au hasard une table peinte parmi les tables mises en vente.

I-C-1- Compléter le tableau avec les différents pourcentages.

I-C-2- Donner la probabilité $\boldsymbol{P_3}$ que la table ne présente aucun défaut de peinture.

I-C-3- Donner la probabilité $\boldsymbol{P_4}$ que la table présente au moins un défaut de peinture.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	$n = 12$	$p = 0,05$
I-A-2-	$P_1 = \mathbb{P}(X = 0) \simeq 0,540$	
I-A-3-	$P_2 = \mathbb{P}(X = 1) \simeq 0,341$	
I-A-4-	$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \simeq 0,118$	
I-B-1-	$\mathbb{P}(978 \leqslant L \leqslant 982) \simeq 0,683$	
I-B-2-	$\mathbb{P}(L \leqslant 978) \simeq 0,159$	
I-B-3-	$\mathbb{P}(L \geqslant 982) \simeq 0,159$	

I-C-1-

%	Défaut sur le plateau	Pas de défaut sur le plateau	Total
Défaut sur les pieds	**2**	**2**	**4**
Pas de défaut sur les pieds	**1**	**95**	**96**
Total	**3**	**97**	**100**

I-C-2-	$P_3 = 0,95$
I-C-3-	$P_4 = 0,05$

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé, direct.

Pour tout nombre complexe z, on définit :

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32.$$

II-1-a- Calculer $P(4)$.

II-1-b- Pour tout nombre complexe z, $P(z)$ s'écrit : $P(z) = (z - 4)\,Q(z)$

où $Q(z)$ s'écrit sous la forme $Q(z) = z^2 + bz + c$.

Donner les valeurs des réels b et c.

II-1-c- Déterminer l'ensemble S_1 des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $Q(z) = 0$. Justifier le résultat.

II-1-d- En déduire l'ensemble S_2 des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.

II-2- Placer sur la figure les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 4, \qquad z_B = 2 + 2i, \qquad z_C = \overline{z_B}$$

où $\overline{z_B}$ désigne le conjugué du complexe z_B.

II-3-a- Donner le module $|z_B|$ et un argument $arg\,(z_B)$ de z_B.

II-3-b- Donner le module $|z_C|$ et un argument $arg\,(z_C)$ de z_C.

II-3-c- En déduire une mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$. Justifier le résultat.

II-4-a- Donner l'affixe Z_1 du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'affixe Z_2 du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

II-4-b- Donner les modules $|Z_1|$ et $|Z_2|$ des complexes Z_1 et Z_2.

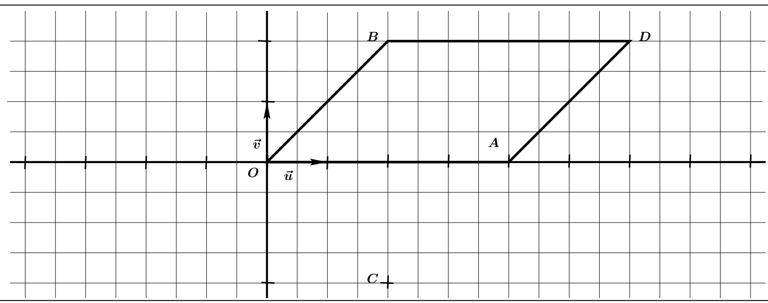
II-5- Quelle est la nature précise du quadrilatère $ABOC$? Justifier la réponse.

II-6- Soit D le point du plan tel que le quadrilatère $OADB$ soit un parallélogramme.

II-6-a- Déterminer l'affixe z_D du point D. Justifier le résultat.

II-6-b- Tracer le parallélogramme $OADB$ sur la figure de **II-2-**.

REPONSES A L'EXERCICE II

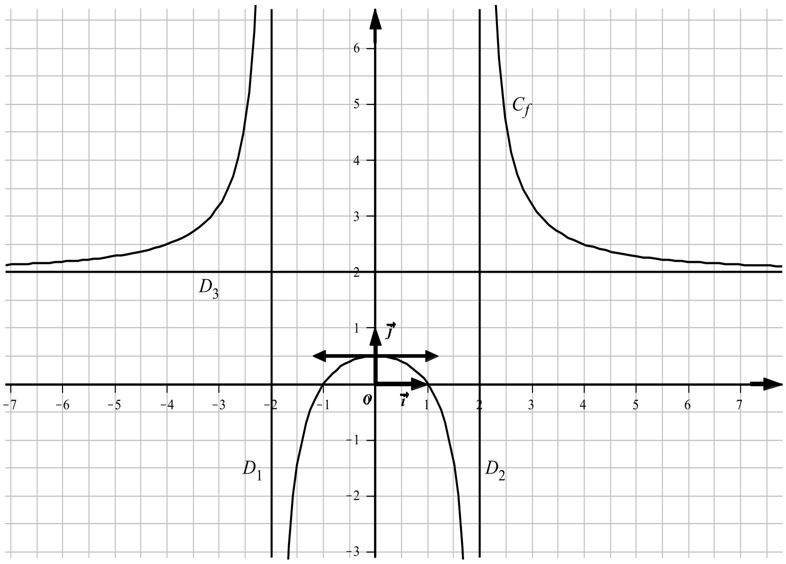
II-1-a-	$P(4) = 0$
II-1-b-	$b = -4$ $\qquad\qquad$ $c = 8$
II-1-c-	$S_1 = \{2 - 2i\,;\, 2 + 2i\}$ car $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16$ donc $z_1 = \dfrac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$
II-1-d-	$S_2 = \{4\,;\, 2 - 2i\,;\, 2 + 2i\}$
II-2-	
II-3-a-	$\lvert z_B \rvert = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $arg(z_B) = \dfrac{\pi}{4}$
II-3-b-	$\lvert z_C \rvert = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $arg(z_C) = -\dfrac{\pi}{4}$
II-3-c-	$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$ car $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OB})$ $= -(\vec{u}, \overrightarrow{OC}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = -arg(z_C) + arg(z_B) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}.$
II-4-a-	$Z_1 = z_B - z_A = -2 + 2i$ $\qquad\qquad$ $Z_2 = z_C - z_A = -2 - 2i$
II-4-b-	$\lvert Z_1 \rvert = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $\lvert Z_2 \rvert = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
II-5-	$ABOC$ est un carré car d'une part, $OB = \lvert z_B \rvert = 2\sqrt{2}$, $OC = \lvert z_C \rvert = 2\sqrt{2}$, $AB = \lvert Z_1 \rvert = 2\sqrt{2}$ et $AC = \lvert Z_2 \rvert = 2\sqrt{2}$ et donc $OB = OC = AB = AC$, et d'autre part $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$.
II-6-a-	$z_D = 6 + 2i$ car $OADB$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD}$ $\Leftrightarrow$ $z_A - z_O = z_D - z_B$ $\Leftrightarrow$ $4 - 0 = z_D - (2 + 2i)$ $\Leftrightarrow$ $z_D = 6 + 2i$.
II-6-b-	Utiliser la figure de **II-2-**

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i}\,,\,\vec{j})$ est donnée ci-dessous.

On a tracé, sur cette figure, les trois asymptotes à $\mathcal{C}_f$: $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.



Partie A Lecture graphique

Dans cette partie, on répondra aux questions à partir d'une lecture graphique.

III-A-1-a- Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

III-A-1-b- Donner l'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

III-A-1-c- Donner l'ensemble S' des solutions de l'équation $f(x) = 1$.

III-A-2- Donner une équation de chaque asymptote $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

III-A-3- Donner, dans le tableau, le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

III-A-4- Donner, dans le tableau, le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B Etude de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$

On se limite dans cette partie à l'étude de f sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$.

La fonction f est définie, pour tout réel $x \in\,]2\,;\,+\infty[$, par : $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x^2 - 4}$.

III-B-1-a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier le résultat.

III-B-1-b- Le résultat énoncé à la question **III-B-1-a-** justifie que l'une des trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ ou $\mathcal{D}_3$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$. De quelle droite s'agit-il ?

III-B-2- Donner la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote $\mathcal{D}_3$ sur $]2\,;\,+\infty[$. Justifier le résultat.

III-B-3- f' désigne la dérivée de f. Donner $f'(x)$ pour tout $x \in\,]2\,;\,+\infty[$.

III-B-4- Quel est le sens de variation de f sur $]2\,;\,+\infty[$? Justifier la réponse.

III-B-5- Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-a- $f(0) = 0,5$ $\qquad f'(0) = 0$

III-A-1-b- $S = \{-1\,;\,1\}$

III-A-1-c- $S' = \emptyset$

III-A-2- $\mathcal{D}_1 : x = -2$ $\qquad \mathcal{D}_2 : x = 2$ $\qquad \mathcal{D}_3 : y = 2$

III-A-3-

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

III-A-4-

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

III-B-1-a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-4) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x^2-4} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \dfrac{6}{x^2-4}\right) = 2.$

III-B-1-b- On en déduit que la droite $\mathcal{D}_3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

III-B-2- Position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_3$ sur $]2\,;\,+\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{D}_3$.

car pour tout $x \in]2\,;\,+\infty[$, $f(x) - 2 = \dfrac{6}{x^2-4}$.

Or, si $x > 2$, $x^2 > 4$ donc $x^2 - 4 > 0$

et ainsi $f(x) - 2 = \dfrac{6}{x^2-4} > 0.$

III-B-3- Pour tout $x \in]2\,;\,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{12\,x}{(x^2-4)^2}.$

III-B-4- Sur $]2\,;\,+\infty[$, f est décroissante car f' y prend des valeurs négatives.

En effet, si $x > 2$, $12\,x \geq 0$ et $(x^2-4)^2 > 0$ donc $-\dfrac{12\,x}{(x^2-4)^2} \leq 0.$

III-B-5- $\mathcal{T} : y = f'(4)(x-4) + f(4)$ avec $f'(4) = -\dfrac{1}{3}$ et $f(4) = \dfrac{5}{2}$,

ce qui donne $y = -\dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{23}{6}.$

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Un boulanger constate que la vitesse de refroidissement du pain sorti du four dépend de la température du pain à l'instant t et de la température ambiante constante de la pièce dans laquelle il est entreposé.

On note a cette température constante de la pièce, exprimée en degrés Celsius.

Pour tout $t \geqslant 0$, on désigne par $y(t)$ la température du pain au bout d'un temps t après sa sortie du four.
La durée t est exprimée en heures et la température $y(t)$ est exprimée en degrés Celsius.

La fonction y vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \quad y'(t) + 6\,y(t) = 6\,a\ .$$

IV-1-a- On considère l'équation différentielle (H) :

$$(H) \ : \quad y'(t) + 6\,y(t) = 0\,.$$

Les solutions y de l'équation différentielle (H) vérifient :

pour tout $t \geqslant 0$, $\quad y(t) = C\,e^{k\,t}$, $\quad$ où C est un réel quelconque.

Donner la valeur du réel k.

IV-1-b- Les solutions y de l'équation différentielle (E) vérifient :

pour tout $t \geqslant 0$, $\quad y(t) = Ce^{-\,6\,t} + B$.

Montrer que $B = a$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le pain sort du four à une température de $180^{\circ}C$, c'est-à-dire que : $\quad y(0) = 180$.

IV-2- Justifier que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$y(t) = (180 - a)\ e^{-\,6\,t} + a\ .$$

IV-3- Dans cette question, le pain est entreposé dans une pièce dont la température constante est $a = 28^{\circ}C$.

IV-3-a- Ecrire, pour tout $t \geqslant 0$, $\ y(t)$ en fonction de t.

IV-3-b- Déterminer la température θ du pain une demi-heure après la sortie du four. On donnera une valeur approchée de θ à un degré près. Justifier le résultat.

IV-3-c- Le boulanger sort une fournée de pains du four.

Au bout de quelle durée D le pain sera-t-il à une température de $62^{\circ}C$? On donnera une valeur approchée de D à une minute près. Justifier le résultat.

IV-4- On reprend l'expression de $y(t)$ donnée à la question **IV-2-**.

Quelle devrait être la température a de la pièce dans laquelle est entreposé le pain afin que le pain, sorti du four à **16** heures, soit à une température de $30^{\circ}C$ à **16 h 30** ? On donnera une valeur approchée de a à un degré près. Justifier le résultat.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$k = -6$
IV-1-b-	$B = a$. En effet, pour tout $t \geq 0$, $y'(t) = -6\,C\,e^{-6t}$ alors : y vérifie (E) $\Leftrightarrow$ $y'(t) + 6\,y(t) = 6\,a$ $\Leftrightarrow$ $-6\,Ce^{-6t} + 6\,Ce^{-6t} + 6\,B = 6\,a$ $\Leftrightarrow$ $6B = 6a$ d'où le résultat.
IV-2-	Pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) = (180 - a)\ e^{-6\,t} + a$. En effet : $y(t) = Ce^{-6t} + a$ donc $y(0) = Ce^{-0} + a = C + a$. Alors $y(0) = 180$ $\Leftrightarrow$ $C + a = 180$ $\Leftrightarrow$ $C = 180 - a$.
IV-3-a-	Pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) = 152\,e^{-6t} + 28$.
IV-3-b-	$\theta \simeq 36^{\circ}C$ Justification : $y(0,5) = 152\,e^{-6\times 0,5} + 28 = 152\,e^{-3} + 28$
IV-3-c-	$D \simeq 15$ minutes. En effet, on cherche D tel que : $y(D) = 62$. Or $y(D) = 152\,e^{-6\,D} + 28$. D'où : $y(D) = 62 \Leftrightarrow 152\,e^{-6D} = 34 \Leftrightarrow e^{-6D} = \dfrac{34}{152} \Leftrightarrow -6\,D = \ln\left(\dfrac{34}{152}\right)$ $\Leftrightarrow D = -\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{34}{152}\right)$ en heures (pour obtenir le résultat en minutes, on multiplie cette valeur par 60).
IV-4-	$a \simeq 22^{\circ}C$ Justification : On cherche a tel que : $y(0,5) = 30$. $y(0,5) = 30$ $\Leftrightarrow$ $(180 - a)\,e^{-3} + a = 30$ $\Leftrightarrow$ $180\,e^{-3} + a\,(1 - e^{-3}) = 30$ $\Leftrightarrow$ $a = \dfrac{30 - 180\,e^{-3}}{1 - e^{-3}}$