ISAT • ESIREM • POLYTECH'Nice-Sophia • POLYTECH'Orléans
EEIGM • ENSGSI • ESSTIN • TELECOM Lille 1 • ISEL
ISTIA • ISTASE • ISTV • Sup GALILEE

GROUPEMENT D'ÉCOLE D'INGENIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

NOM :	PRENOM :

Centre d'Examen :	N° Inscription :

Epreuves de Mathématiques et de Physique-Chimie
Mercredi 7 mai 2008
9 h - 12 h

Ne rien inscrire ci-dessous

SUJET DE MATHEMATIQUES

Nous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.

La durée conseillée de ce sujet de mathématique est de 1 h 30.

Il est noté sur 20 points.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage du téléphone est interdit.

Vous devez traiter les quatre exercices indépendants proposés.

Les démonstrations ne sont à rédiger que si elles sont explicitement demandées.

1	
2	
3	
4	

TOTAL

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

EXERCICE I - (7 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On considère deux fonctions f et g définies sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ par :

$$f(x) = \cos x \qquad\qquad g(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}.$$

Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

I-1-a- Pour tout x de $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$, $g(x) - f(x)$ s'écrit sous la forme :

$g(x) - f(x) = \dfrac{h(x)}{1-\sin x}$. Donner une expression simplifiée de $h(x)$.

I-1-b- Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $g(x) - f(x) = 0$ dans $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

I-1-c- Etudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

I-1-d- Déterminer les coordonnées des points d'intersection C et D des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Précisez les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

I-2-a- Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.

I-2-b- Dresser le tableau des variations de f.

I-3-a- Déterminer $g'(x)$, où g' désigne la dérivée de g.

I-3-b- Dresser le tableau des variations de g.

I-4-a- Donner une équation des tangentes T_C et T_D à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points C et D.

I-4-b- Donner une équation des tangentes T'_C et T'_D à la courbe $\mathcal{C}_g$ aux points C et D.

I-5- Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que les tangentes T_C, T_D et T'_C et T'_D.

I-6-a- On pose : $\displaystyle I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx$ **et** $\displaystyle J = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1-\sin x}\, dx$.

Déterminer les valeurs de I et de J. Justifier les calculs.

I-6-b- Sur la figure de la question **I-5-**, colorier la partie de plan d'aire $I - J$ unités d'aires.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-a- $h(x) =$

I-1-b- $\mathcal{S} = \{ \quad \}$

I-1-c-

x	$\frac{3\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ 2π
signe de $g(x) - f(x)$	

I-1-d- $C\,(\quad ; \quad)$ et $D\,(\quad ; \quad)$

Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

I-2-a- $f'(x) =$

I-2-b-

x	$\frac{3\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ 2π
$f'(x)$	
$f(x)$	

I-3-a- $g'(x) =$

I-3-b-

x	$\frac{3\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ 2π
$g'(x)$	
$g(x)$	

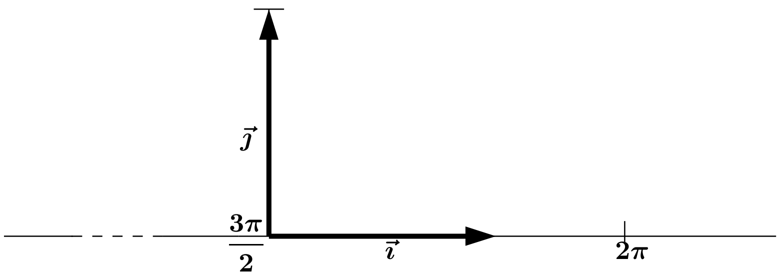
I-4-a- T_C :

T_D :

I-4-b- T'_C :

T'_D :

I-5-



I-6-a- $I =$ car

$J =$ car

I-6-b– Utilisez la figure de **I-A-5-**.

EXERCICE II - (2,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera **sa valeur exacte**, écrite sous forme de **fraction irréductible**.

Au cours d'une loterie, vingt billets sont mis en vente au prix de **6** euros le billet. Cinq billets seulement sont gagnants, chacun rapportant **30** euros.

Un joueur achète deux billets.

On note $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire représentant le bénéfice net du joueur, exprimé en euros. Le bénéfice net est le gain (positif ou nul) perçu par le joueur à l'issue de la partie, diminué du prix d'achat des deux billets. Le bénéfice net peut donc être négatif.

II-1-a- Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$.

II-1-b- Donner l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$ de $\boldsymbol{X}$.

II-2- L'organisateur de la loterie propose de multiplier les gains par deux si on achète les billets à **13** euros le billet.

Soit $\boldsymbol{Y}$ la variable aléatoire représentant le bénéfice net, en euros, d'un joueur achetant deux billets à **13** euros le billet.

II-2-a- Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de $\boldsymbol{Y}$.

II-2-b- Donner l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y})$ de $\boldsymbol{Y}$.

II-2-c- Le joueur a-t-il intérêt à accepter la proposition de l'organisateur ? Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-a-	x_i	
	$\mathbb{P}(X = x_i)$	
II-1-b-	$\mathbb{E}(X) =$	
II-2-a-	y_i	
	$\mathbb{P}(Y = y_i)$	
II-2-b-	$\mathbb{E}(Y) =$	
II-2-c-		

EXERCICE III - (4 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}; \vec{v})$ orthomormé, on considère les points A, I et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1, \qquad z_I = 2 \qquad \text{et} \qquad z_B = 3$$

Pour tout complexe z, différent de 2, on pose :

$$z' = \frac{1}{z-2} + 2$$

On considère la fonction F qui à tout point M du plan, différent de I et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

III-1- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $F(M) = M$. Justifier la réponse.

III-2-a- Calculer, en fonction de z, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

III-2-b- En déduire une relation entre les longueurs IM et IM' et une relation entre les angles $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM})$ et $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM'})$.

III-3- On considère un point M différent de I, de A et de B. Soit z son affixe.

III-3-a- Donner le réel β qui vérifie : $\quad \dfrac{1-z'}{3-z'} = \beta\,\dfrac{1-z}{3-z}$.

III-3-b- En déduire une relation entre $\dfrac{M'A}{M'B}$ et $\dfrac{MA}{MB}$ et une relation entre les angles $(\overrightarrow{M'B}; \overrightarrow{M'A})$ et $\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})$.

III-3-c- On suppose dans cette question que M appartient à la médiatrice Δ du segment $[AB]$. Que peut on en déduire pour le point M' ? Justifier la réponse.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-	$\mathcal{E} = \left\{ \qquad\qquad \right\}$ car
III-2-a-	affixe de $\overrightarrow{IM}$: affixe de $\overrightarrow{IM'}$:
III-2-b-	Relation entre IM et IM' : Relation entre $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM})$ et $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM'})$:
III-3-a-	$\beta =$
III-3-b-	Relation entre $\dfrac{M'A}{M'B}$ et $\dfrac{MA}{MB}$: Relation entre $(\overrightarrow{M'B}\,;\,\overrightarrow{M'A})$ et $(\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA})$:
III-3-c-	M' car

EXERCICE IV- (6,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Question Préliminaire

On considère un triangle quelconque LMN du plan. On note H la projection orthogonale de L sur la droite (MN) et I le milieu du segment $[MN]$.

IV-0- Démontrer que les aires des triangles LMI et LIN sont égales.

Soit ABC un triangle du plan. On considère les points A', B' et C' définis de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point P, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point Q et les droites (AA') et (CC') se coupent en un point R.

IV-1- Construire les points A', B', C' et les points P, Q, R sur la figure donnée.

IV-2- Déterminer les réels a, b et c tels que :
- C' soit le barycentre du système $\{(A,a)\,;\,(B,1)\}$,
- A' soit le barycentre du système $\{(B,b)\,;\,(C,1)\}$,
- B' soit le barycentre du système $\{(A,1)\,;\,(C,c)\}$.

IV-3- On considère les barycentres G_1, G_2 et G_3 des systèmes suivants :
$G_1 = bar\ \{(A,2)\,;\,(B,1)\,;\,(C,4)\}$,
$G_2 = bar\ \{(A,4)\,;\,(B,2)\,;\,(C,1)\}$,
$G_3 = bar\ \{(A,1)\,;\,(B,4)\,;\,(C,2)\}$.

IV-3-a- Expliquer pourquoi G_1 appartient aux droites (CC') et (BB').

IV-3-b- En déduire quel est le point G_1.

IV-3-c- De même, identifier les points G_2 et G_3.

IV-4- A l'aide de la question **IV-$\mathcal{B}$-3-**, déterminer les réels x, y, x' et y' tels que :
$\overrightarrow{CR} = x\,\overrightarrow{CA} + y\,\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CQ} = x'\,\overrightarrow{CA} + y'\,\overrightarrow{CB}$.

En déduire la position de Q sur le segment $[CR]$. Justifier toutes les réponses.

IV-5-a- On admet alors que le point P est le milieu du segment $[BQ]$ et que le point R est le milieu du segment $[AP]$.

A l'aide des questions **IV-0-** et **IV-4-**, justifier chaque égalité d'aires suivante :

$Aire(PQR) = Aire(PQC)$ $\quad$ $Aire(PQC) = Aire(CBP)$

$Aire(PQR) = Aire(BRP)$ $\quad$ $Aire(BRP) = Aire(BRA)$

$Aire(PQR) = Aire(AQR)$ $\quad$ $Aire(AQR) = Aire(AQC)$

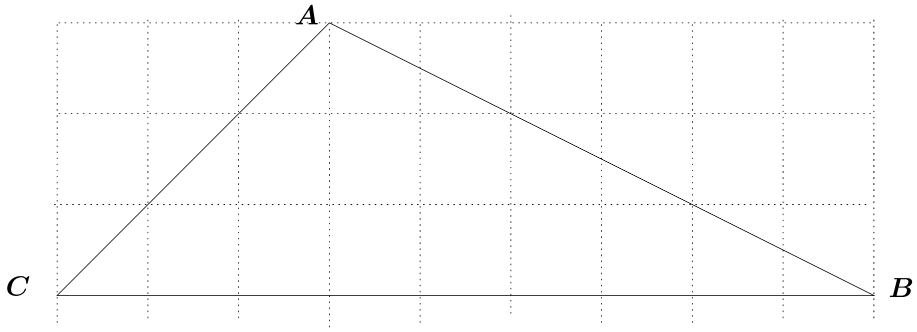
IV-5-b- Déterminer alors le rapport $k = \dfrac{Aire(PQR)}{Aire(ABC)}$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-0- $Aire(LMI) = Aire(LIN)$ car

IV-1-



IV-2- $a =$ $b =$ $c =$

IV-3-a- $G_1 \in (CC')$ car

$G_1 \in (BB')$ car

IV-3-b- $G_1 =$

IV-3-c- $G_2 =$ $G_3 =$

IV-4- $x =$ et $y =$ car

$x' =$ et $y' =$ car

Q est car

IV-5-a- $Aire(PQR) = Aire(PQC)$ car

$Aire(PQC) = Aire(CBP)$ car

$Aire(PQR) = Aire(BRP)$ car

$Aire(BRP) = Aire(BRA)$ car

$Aire(PQR) = Aire(AQR)$ car

$Aire(AQR) = Aire(AQC)$ car

IV-5-b- $k =$

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

EXERCICE I - (7 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On considère deux fonctions f et g définies sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ par :

$$f(x) = \cos x \qquad\qquad g(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

I-1-a- Pour tout x de $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$, $g(x) - f(x)$ s'écrit sous la forme :

$g(x) - f(x) = \dfrac{h(x)}{1 - \sin x}$. Donner une expression simplifiée de $h(x)$.

I-1-b- Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $g(x) - f(x) = 0$ dans $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

I-1-c- Etudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

I-1-d- Déterminer les coordonnées des points d'intersection C et D des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Précisez les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

I-2-a- Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.

I-2-b- Dresser le tableau des variations de f.

I-3-a- Déterminer $g'(x)$, où g' désigne la dérivée de g.

I-3-b- Dresser le tableau des variations de g.

I-4-a- Donner une équation des tangentes T_C et T_D à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points C et D.

I-4-b- Donner une équation des tangentes T'_C et T'_D à la courbe $\mathcal{C}_g$ aux points C et D.

I-5- Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que les tangentes T_C, T_D et T'_C et T'_D.

I-6-a- On pose : $\displaystyle I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx$ et $\displaystyle J = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin x}\,dx$.

Déterminer les valeurs de I et de J. Justifier les calculs.

I-6-b- Sur la figure de la question **I-5-**, colorier la partie de plan d'aire $I - J$ unités d'aires.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-a- $h(x) = \cos x \sin x$

I-1-b-

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{3\,\pi}{2}\,;\,2\,\pi\right\}$$

I-1-c-

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
signe de $g(x) - f(x)$	0	$-$	0

I-1-d- $C\left(\frac{3\pi}{2}\,;\,0\right)$ et $D\left(2\,\pi\,;\,1\right)$

Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$: $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

I-2-a-

$$f'(x) = -\sin x$$

I-2-b-

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	1	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

I-3-a-

$$g'(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$$

I-3-b-

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	1
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

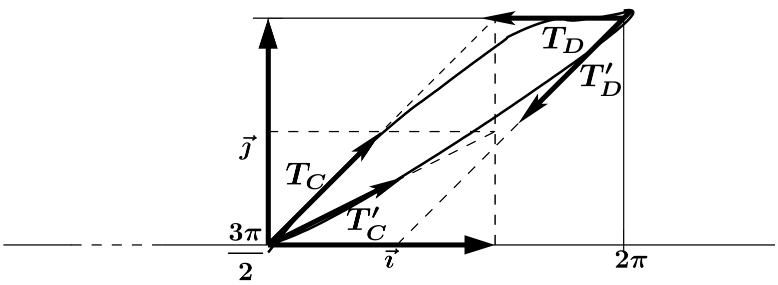
I-4-a- $T_C\ :\ y = x - \frac{3\pi}{2}$

$T_D\ :\ y = 1$

I-4-b- $T'_C\ :\ y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

$T'_D\ :\ y = x - 2\pi + 1$

I-5-



I-6-a- $I = 1$ car $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

$J = \ln 2$

car $J = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin x}dx = [-\ln|1 - \sin x|]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2$

I-6-b– Utilisez la figure de **I-A-5-**.

EXERCICE II - (2,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera **sa valeur exacte**, écrite sous forme de **fraction irréductible**.

Au cours d'une loterie, vingt billets sont mis en vente au prix de **6** euros le billet. Cinq billets seulement sont gagnants, chacun rapportant **30** euros.

Un joueur achète deux billets.

On note $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire représentant le bénéfice net du joueur, exprimé en euros. Le bénéfice net est le gain (positif ou nul) perçu par le joueur à l'issue de la partie, diminué du prix d'achat des deux billets. Le bénéfice net peut donc être négatif.

II-1-a- Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$.

II-1-b- Donner l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$ de $\boldsymbol{X}$.

II-2- L'organisateur de la loterie propose de multiplier les gains par deux si on achète les billets à **13** euros le billet.

Soit $\boldsymbol{Y}$ la variable aléatoire représentant le bénéfice net, en euros, d'un joueur achetant deux billets à **13** euros le billet.

II-2-a- Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de $\boldsymbol{Y}$.

II-2-b- Donner l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y})$ de $\boldsymbol{Y}$.

II-2-c- Le joueur a-t-il intérêt à accepter la proposition de l'organisateur ? Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-a-

x_i	-12	18	48
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{21}{38}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{1}{19}$

II-1-b- $\mathbb{E}(X) = 3$

II-2-a-

y_i	-26	34	94
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{21}{38}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{1}{19}$

II-2-b- $\mathbb{E}(Y) = 4$

II-2-c- Le joueur a intérêt à accepter la nouvelle proposition car son espérance de gain sera plus grande : $\mathbb{E}(Y) \geq \mathbb{E}(X)$

EXERCICE III - (4 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}; \vec{v})$ orthomormé, on considère les points A, I et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1, \qquad z_I = 2 \qquad \text{et} \qquad z_B = 3$$

Pour tout complexe z, différent de 2, on pose :

$$z' = \frac{1}{z-2} + 2$$

On considère la fonction F qui à tout point M du plan, différent de I et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

III-1- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $F(M) = M$. Justifier la réponse.

III-2-a- Calculer, en fonction de z, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

III-2-b- En déduire une relation entre les longueurs IM et IM' et une relation entre les angles $(\vec{u}\,;\overrightarrow{IM})$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{IM'})$.

III-3- On considère un point M différent de I, de A et de B. Soit z son affixe.

III-3-a- Donner le réel β qui vérifie : $\dfrac{1-z'}{3-z'} = \beta\,\dfrac{1-z}{3-z}$.

III-3-b- En déduire une relation entre $\dfrac{M'A}{M'B}$ et $\dfrac{MA}{MB}$ et une relation entre les angles $(\overrightarrow{M'B}; \overrightarrow{M'A})$ et $\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})$.

III-3-c- On suppose dans cette question que M appartient à la médiatrice Δ du segment $[AB]$. Que peut on en déduire pour le point M' ? Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-	$\mathcal{E} = \Big\{ A\,;\,B \Big\}$ car $F(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad z = \dfrac{1}{z-2} + 2$ $\Leftrightarrow \quad z - 2 = \dfrac{1}{z-2} \quad \Leftrightarrow \quad (z-2)^2 = 1$ $\Leftrightarrow \quad z^2 - 4z + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1$ ou $z = 3$
III-2-a-	affixe de $\overrightarrow{IM}$: $z - 2$ affixe de $\overrightarrow{IM'}$: $z' - 2 = \dfrac{1}{z-2}$
III-2-b-	Relation entre IM et IM' : $IM' = \dfrac{1}{IM}$ Relation entre $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM})$ et $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM'})$: $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM'}) = -(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM})$
III-3-a-	$\beta = -1$
III-3-b-	Relation entre $\dfrac{M'A}{M'B}$ et $\dfrac{MA}{MB}$: $\dfrac{M'A}{M'B} = \dfrac{MA}{MB}$ Relation entre $(\overrightarrow{M'B}\,;\,\overrightarrow{M'A})$ et $(\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA})$: $(\overrightarrow{M'B}\,;\,\overrightarrow{M'A}) = (\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA}) + \pi$
III-3-c-	M' appartient à la médiatrice Δ car $M \in \Delta \quad \Rightarrow \quad MA = MB \quad \Rightarrow \quad \dfrac{MA}{MB} = 1$ Et, d'après **III-3-b-**, on en déduit que : $\dfrac{M'A}{M'B} = 1$ ce qui implique : $M'A = M'B \quad \Rightarrow \quad M' \in \Delta$

EXERCICE IV- (6,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Question Préliminaire

On considère un triangle quelconque LMN du plan. On note H la projection orthogonale de L sur la droite (MN) et I le milieu du segment $[MN]$.

IV-0- Démontrer que les aires des triangles LMI et LIN sont égales.

Soit ABC un triangle du plan. On considère les points A', B' et C' définis de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point P, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point Q et les droites (AA') et (CC') se coupent en un point R.

IV-1- Construire les points A', B', C' et les points P, Q, R sur la figure donnée.

IV-2- Déterminer les réels a, b et c tels que :
- C' soit le barycentre du système $\{(A, a)\,;\,(B, 1)\}$,
- A' soit le barycentre du système $\{(B, b)\,;\,(C, 1)\}$,
- B' soit le barycentre du système $\{(A, 1)\,;\,(C, c)\}$.

IV-3- On considère les barycentres G_1, G_2 et G_3 des systèmes suivants :
$G_1 = bar\ \{(A, 2)\,;\,(B, 1)\,;\,(C, 4)\}$,
$G_2 = bar\ \{(A, 4)\,;\,(B, 2)\,;\,(C, 1)\}$,
$G_3 = bar\ \{(A, 1)\,;\,(B, 4)\,;\,(C, 2)\}$.

IV-3-a- Expliquer pourquoi G_1 appartient aux droites (CC') et (BB').

IV-3-b- En déduire quel est le point G_1.

IV-3-c- De même, identifier les points G_2 et G_3.

IV-4- A l'aide de la question **IV-$\mathcal{B}$-3-**, déterminer les réels x, y, x' et y' tels que :
$\overrightarrow{CR} = x\,\overrightarrow{CA} + y\,\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CQ} = x'\,\overrightarrow{CA} + y'\,\overrightarrow{CB}$.

En déduire la position de Q sur le segment $[CR]$. Justifier toutes les réponses.

IV-5-a- On admet alors que le point P est le milieu du segment $[BQ]$ et que le point R est le milieu du segment $[AP]$.

A l'aide des questions **IV-0-** et **IV-4-**, justifier chaque égalité d'aires suivante :
$Aire(PQR) = Aire(PQC) \qquad Aire(PQC) = Aire(CBP)$
$Aire(PQR) = Aire(BRP) \qquad Aire(BRP) = Aire(BRA)$
$Aire(PQR) = Aire(AQR) \qquad Aire(AQR) = Aire(AQC)$

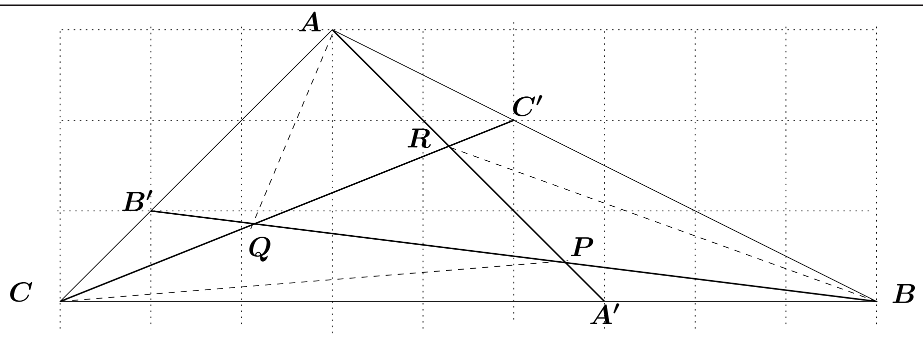
IV-5-b- Déterminer alors le rapport $k = \dfrac{Aire(PQR)}{Aire(ABC)}$.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-0- $Aire(LMI) = \dfrac{MI \times LH}{2}$ et $Aire(LIN) = \dfrac{IN \times LH}{2}$

I étant le milieu de $[MN]$, on a $MI = IN$ donc $Aire(LMI) = Aire(LIN)$

IV-1-



IV-2- $a = 2$ $\quad$ $b = 2$ $\quad$ $c = 2$

IV-3-a- $G_1 \in (CC')$ car $G_1 = bar\ \{(A,2);(B,1);(C,4)\}$

et $C' = bar\ \{(A,2);(B,1)\}$ donc d'après la propriété des barycentres partiels, on a : $G_1 = bar\ \{(C',3);(C,4)\}$ d'où $G_1 \in (CC')$

$G_1 \in (BB')$ car $G_1 = bar\ \{(A,2);(B,1);(C,4)\}$

et $B' = bar\ \{(A,1);(C,2)\} = bar\ \{(A,2);(C,4)\}$ et d'après la propriété des barycentres partiels, on a : $G_1 = bar\ \{B,1);(B',6)\}$ d'où $G_1 \in (BB')$

IV-3-b- $G_1 = Q$

IV-3-c- $G_2 = R$ $\quad$ $G_3 = P$

IV-4- $x = \dfrac{4}{7}$ et $y = \dfrac{2}{7}$ car $R = G_2 = bar\ \{(A,4);(B,2);(C,1)\}$

donc $7\overrightarrow{CR} = 4\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ d'où $\overrightarrow{CR} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \dfrac{2}{7}\overrightarrow{CB}$.

$x' = \dfrac{2}{7}$ et $y' = \dfrac{1}{7}$ car $Q = G_1 = bar\ \{(A,2);(B,1);(C,4)\}$

donc $7\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ d'où $\overrightarrow{CQ} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{CB}$.

Q est le milieu de $[CR]$ car $\overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{CQ}$.

IV-5-a- $Aire(PQR) = Aire(PQC)$ car Q est le milieu de $[CR]$ et on applique **IV-0-** dans le triangle PCR.

$Aire(PQC) = Aire(CBP)$ car P milieu de $[BQ]$ (d'après **IV-0-** dans CBQ).

$Aire(PQR) = Aire(BRP)$ car P milieu de $[BQ]$ (d'après **IV-0-** dans RBQ).

$Aire(BRP) = Aire(BRA)$ car R milieu de $[AP]$ (d'après **IV-0-**dans BAP).

$Aire(PQR) = Aire(AQR)$ car R milieu de $[AP]$ (d'après **IV-0-** dans AQP).

$Aire(AQR) = Aire(AQC)$ car Q milieu de $[CR]$ (d'après **IV-0-** dans ACR).

IV-5-b- $k = \dfrac{1}{7}$