ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1 h 30

Questions obligatoires

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

   (A) $\lim\limits_{x \to 0} f(x+1) = 2$

   (B) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2) = 1$

   (C) $\lim\limits_{z \to 1} f(z-1) = 1$

   (D) $\lim\limits_{t \to +\infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = 1$

   (E) $\lim\limits_{u \to 3} f(u^2 - 2u - 3) = 0$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

   (A) $e^{x+2} = e^x + e^2$

   (B) $e^{2x} - 2e^x + 1 \geqslant 0$

   (C) $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$

   (D) Si $x > 0$, $e^{x \ln(x)} = x^x$

   (E) Si $x < 0$, $e^{1-x} - e^{-x} < 0$

3. Soit f la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$.

   (A) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

   (B) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

   (C) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \ln(x)$

   (D) f est croissante sur $]0, +\infty[$

   (E) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$

4. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - e^{-x}$.

   (A) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   (B) $f(1) > 0$

   (C) Il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f(x) = 0$

   (D) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 0$

   (E) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 1$

5. Soit B un ensemble de 100 boules qui sont, d'une part, soit rouge soit noire ; d'autre part, soit en verre, soit en plastique. On considère les 2 énoncés suivants :

P : Toute boule rouge est en verre

Q : Il existe une boule noire et en verre

(A) Pour prouver que P est faux, il suffit de trouver une boule rouge et en plastique

(B) Pour prouver que P est faux, il est nécessaire de trouver une boule rouge et en plastique

(C) Pour prouver que P est vrai, il est nécessaire de vérifier que toutes les boules noires sont en plastique

(D) Si Q est vrai alors P est faux

(E) Si P est faux alors Q est vrai

6. Soit f une fonction définie sur $[0,2]$, on considère les 2 énoncés suivants :

P : Pour tout $x \in [0,2],\ f(x) \neq 0$

Q : f n'est pas positive sur $[0,2]$

(A) P signifie : f est strictement positive sur $[0,2]$ ou strictement négative sur $[0,2]$

(B) P signifie : Pour tout $x \in [0,2],\ f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$

(C) Q signifie : f est négative sur $[0,2]$

(D) La négation de P peut s'écrire : f est la fonction nulle sur $[0,2]$

(E) La négation de Q peut s'écrire : f n'est pas négative sur $[0,2]$

Questions à choisir

7. Soit f une fonction dérivable sur $[-1,1]$, paire et vérifiant : pour tout $x \in [0,1],\ x^6 \leqslant f(x) \leqslant x^2$.

(A) Pour tout $x \in [-1,0],\ x^6 \leqslant f(x) \leqslant x^2$

(B) $f(0) = 0$

(C) $f'(0) = 0$

(D) f' est impaire

(E) Pour tout $x \in [0,1],\ 6x^5 \leqslant f'(x) \leqslant 2x$

8. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$

(A) (u_n) est une suite géométrique

(B) (u_n) est décroissante

(C) (u_n) est convergente

(D) Pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

(E) $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = 1$

9. (A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

(D) $\displaystyle\int_0^{1} e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^2 - 1$

(E) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

10. Pour un nombre complexe z, $\mathrm{Re}(z)$ désigne sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

(A) $\mathrm{Re}\big((1+i)^4\big) = 4\,\mathrm{Re}(1+i)$

(B) $\arg\big((1+i)^4\big) = 4\arg(1+i)$ modulo 2π

(C) $\mathrm{Im}\big((-1+i\sqrt{3})^3\big) = 3\,\mathrm{Im}\big(-1+i\sqrt{3}\big)$

(D) $\big|(-1+i\sqrt{3})^3\big| = 3\,\big|-1+i\sqrt{3}\big|$

(E) $\dfrac{(1+i)^4}{(-1+i\sqrt{3})^3} = -\dfrac{1}{2}$

11. Un paquet de 10 cartes à jouer comprend 4 as, 3 rois et 3 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points tandis que celui d'une dame coûte 1 point. On tire simultanément 2 cartes et on note X le nombre total de points.

(A) $P(X = 7) = \dfrac{4}{15}$

(B) $P(X = 4) = \dfrac{4}{15}$

(C) $P(X = 6) = \dfrac{4}{15}$

(D) $P(X < 0) = \dfrac{1}{15}$

(E) $P(X \geqslant 1) = \dfrac{14}{15}$

12. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ d'équation $x - 2y + 4 = 0$, les points $I(1,0)$, $J(-1,4)$ et $H(0,2)$.

(A) La droite (IH) est orthogonale à Δ

(B) Les points I, J et H sont alignés

(C) La droite (JH) est orthogonale à Δ

(D) La droite orthogonale à Δ passant par I a pour équation $-x + 2y + 1 = 0$

(E) Δ est la médiatrice du segment $[IJ]$

13. Pour tous les entiers naturels n et p, strictement positifs

(A) n^2 pair équivaut à n pair

(B) $n^2 + p^2$ pair équivaut à $n + p$ pair

(C) Si np est impair alors $n + p$ est impair

(D) Si np est impair alors $n^2 + np + p^2$ est impair

(E) Si $n^2 + np + p^2$ est pair alors n et p sont pairs

14. On sait que la fonction $f(x) = \dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante sur $[e^4, +\infty[$ et que $e^4 \approx 54,598$. On programme l'algorithme suivant :

Variable :	n entier naturel
Initialisation :	$n \leftarrow 2$
Traitement :	Tant que $\dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{\sqrt{n}} \geqslant 1$
	$\quad n \leftarrow n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Le programme affiche 5504.

On peut alors affirmer

(A) Pour tout $x \in]5504, +\infty[$, $f(x) \geqslant 1$

(B) $f(5504) < 1$

(C) Il existe $x \in [5503, 5504]$, $\big(\ln(x)\big)^2 = \sqrt{x}$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 1$

(E) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$