EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Vous devez commencer par remplir la partie administrative de votre fiche optique, conformément à *la notice d'utilisation des fiches optiques de QCM* que vous avez téléchargée avec votre convocation.

- L'épreuve de mathématiques est constituée de 8 questions obligatoires et de 4 questions à choisir parmi 8.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  - ✓ Vous cocher la (ou les) case(s) **V** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  - ✓ Vous cocher la (ou les) case(s) **F** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification.
- Toute erreur est pénalisée.
- **Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte**.
- Seule la fiche optique est ramassée en fin d'épreuve.

LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISEES

Vérifiez que votre épreuve est constituée de 6 pages numérotées de 1 à 6.
Dans le cas contraire, demandez un nouveau sujet.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée 1h 30

Questions Obligatoires

1.] Pour tout nombre réel x, on a

(A) $2x^2 - x - 1 = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

(B) $x^2 + 2x + 5 \geq 0$

(C) $3 - 2x - x^2 \geq 0$ si et seulement si $x \in [-3,1]$

(D) Si $x \geq 1$ alors $3 - 2x - x^2 \leq 0$

(E) Si $x^2 - 5x + 6 = 0$ alors $x \geq 0$

2.] Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

Alors :

(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

(B) $\lim\limits_{u \to +\infty} f(2u) = 3$

(C) $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y+1) = 4$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

(E) Il existe $a \in [0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \leq x$

3.] Les fonctions suivantes sont dérivables en $x = 0$

(A) $x \mapsto x|x|$

(B) $x \mapsto |x| \sin x$

(C) $x \mapsto \sin|x|$

(D) $\begin{cases} x \mapsto x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x \mapsto x^3 - x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} x \mapsto x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x \mapsto x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4.] Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$. Alors :

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

(C) f est décroissante sur $]0,2[$

(D) f est croissante sur $]-\infty,0[$

(E) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x=1$ est $y=-ex+2e$

5.]

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt=\frac{1}{2}$

(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt=\frac{1}{2}$

(C) $\displaystyle\int_1^{e} \ln t\,dt=1$

(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt=1$

(E) $\displaystyle\int_0^{1} te^t\,dt=1$

6.]

(A) Pour tout $x\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad\ln(2^x)=x\ln 2$

(B) Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ $\quad\ln x=2\ln\sqrt{x}$

(C) Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ $\quad\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=-\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

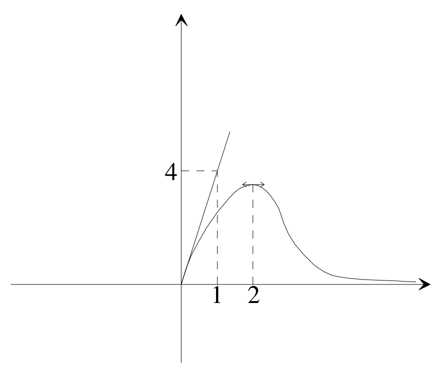
(D) Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ $\quad\ln\left(x^2+4x+4\right)=2\ln(x+2)$

(E) Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ $\quad\left[\ln(x+1)\right]^2=\ln(2x+2)$

7.] Soit C la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ dont l'allure est donnée ci-contre :

L'expression de f est de la forme : $f(x)=(ax+b)e^{cx}$

Alors :



(A) $c<0$

(B) $f'(0)=4$

(C) $f'(2)=0$

(D) Pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f'(x)=(ax+a+b)e^{cx}$

(E) Pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)=4x\,e^{-\frac{1}{2}x}$

8.] On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \leqslant 1 & f(x) = x^2 - 2x - 3 \\ \text{si } x > 1 & f(x) = \dfrac{x-5}{x} \end{cases}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Alors

(A) f est dérivable en $x = 1$
(B) C admet une demie tangente horizontale au point $I(1,-4)$
(C) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions
(D) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C
(E) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C

Questions à choisir (4 questions à choisir parmi les suivantes)

9.] Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in \left]0,+\infty\right[$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Alors :

(A) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2012$ alors $q > 1$
(B) Si $q < 1$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$
(C) Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$
(D) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$ alors $q = \dfrac{1}{2}$
(E) Si $q = 2$ alors $S_4 = 15$

10.] Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 \in \left]1,+\infty\right[$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$$

Alors :

(A) (u_n) est monotone
(B) (u_n) est minorée par 1
(C) Si $u_0 \in \left]1,2\right[$ (u_n) converge vers 1
(D) Si $u_0 \in \left]1,2\right[$ (u_n) converge vers 2
(E) Si $u_0 \in \left]2,+\infty\right[$ (u_n) converge vers 2

11.] Dans une mare vivent des grenouilles vertes et des rainettes. 30 % des grenouilles sont des rainettes et donc 70 % des grenouilles sont des grenouilles vertes.

Un héron mange 10 % des rainettes et 20 % des grenouilles vertes.

Alors la probabilité

(A) qu'une rainette soit mangée par le héron est $\frac{1}{10}$

(B) qu'une grenouille verte soit mangée par le héron est $\frac{1}{5}$

(C) qu'une grenouille soit mangée par le héron est $\frac{13}{21}$

(D) qu'une grenouille soit une rainette et mangée par le héron est $\frac{3}{100}$

(E) qu'une grenouille mangée par le héron soit une rainette est $\frac{63}{130}$

12.] Une compagnie aérienne dessert 6 villes (Rennes, Brest, Nantes, Lorient, Quimper, Morlaix). On appelle ligne aérienne tout trajet joignant 2 villes. (Rennes-Brest et Brest-Rennes désignent la même ligne).

(A) La compagnie a 30 lignes en service
(B) La compagnie a 15 lignes en service

Pendant l'été la compagnie envisage d'augmenter le nombre de villes desservies

(C) Si la compagnie décide d'assurer 36 lignes alors le nombre de villes desservies sera 9
(D) Si la compagnie décide d'assurer 45 lignes alors le nombre de villes desservies sera 10

(E) La compagnie ne peut envisager d'assurer 32 lignes

13.] On considère un triangle MNP et les points I, J, K tels que :
I est le barycentre de $(M,2),(P,1)$, J est le barycentre de $(M,1),(N,2)$ et K est le barycentre de $(N,-4),(P,1)$.

Alors :

(A) N est le barycentre de $(K,3),(P,1)$

(B) J est le barycentre de $(M,2),(K,3),(P,1)$

(C) I, J et K sont alignés

(D) J est le barycentre de $(I,1),(K,1)$

(E) J est le milieu de $[I,K]$

14.] Pour tout nombre complexe z, $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\arg(z)$ son argument.
Alors :

(A) $\mathrm{Re}\left((1+i)^4\right) = 4\,\mathrm{Re}(1+i)$

(B) $\arg\left((1+i)^4\right) = 4\arg(1+i)$ modulo 2π

(C) $\mathrm{Im}\left(\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3\right) = 3\,\mathrm{Im}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

(D) $\left|\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3\right| = 3\left|-1+i\sqrt{3}\right|$

(E) $\dfrac{(1+i)^4}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3} = -\dfrac{1}{2}$

15.] Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z = \cos x + i\sin x$ et $z' = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) + i\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Alors :

(A) $z = z'$
(B) $z + z'$ est réel
(C) $z - z'$ est imaginaire pur
(D) $zz' = 1$
(E) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = 2\arg z$

16.] On considère la fonction f définie sur $[0,10]$ par : $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, et T_M la tangente à C au point M de C. Alors :

(A) Il existe un point M de C tel que T_M soit parallèle à l'axe des abscisses

(B) Il existe un point M de C tel que T_M soit parallèle à la droite IJ où $I(1,0)$ $J(4,3)$

(C) Il existe un point M de C tel que T_M ait pour coefficient directeur 8

(D) Il existe deux points distincts M et N de C tel que T_M et T_N soient parallèles

(E) Il existe deux points distincts M et N de C tel que T_M et T_N soient perpendiculaires