

MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

PUBLIC CONCERNÉ

Tout public possédant les connaissances généralement enseignées dans un cours de mathématiques de 2^e et de 3^e cycle scientifique, économique ou commercial, à l'université ou en classes préparatoires.

NATURE DE L'ÉPREUVE

L'épreuve de mathématiques d'admissibilité en 2^e année a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'analyse, l'algèbre linéaire et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

PROGRAMME

Algèbre

Réduction des endomorphismes, diagonalisation et trigonalisation, systèmes récurrents et différentiels, dualité, formes bilinéaires et quadratiques, orthogonalisation de Schmidt, formes hermitiennes et endomorphismes unitaires, produit mixte et produit vectoriel.

Analyse

Espaces métriques, espaces vectoriels normés, topologie de la convergence uniforme, fonction de la variable réelle, formule de Taylor, intégrale des fonctions réglées et critères de convergence, intégrale paramétrique et dérivabilité, critère de convergence des séries, série de fonction et séries entières, fonction de plusieurs variables, différentiabilité des applications partielles, théorème de Schwartz et recherche d'extrémum local, les multiplicateurs de Lagrange, les équations différentielles du premier et second ordre, géométrie différentielle, études des courbes et des arcs paramétrés, courbes tracées sur une surface, intégrales multiples : aires et volumes.

Statistique

Les variables aléatoires continues, espérance mathématique et variance, les principales lois statistiques, théorie de l'estimation, méthodes de tests d'hypothèses.

CONSEILS DE PRÉPARATION

Pour une préparation efficace

Une bonne assimilation du cours est indispensable. Il faut donc consacrer assez de temps pour bien connaître les principales définitions, les théorèmes de base et les



propriétés courantes. Il faut faire beaucoup d'exercices. Pour pouvoir contrôler ses résultats, il vaut mieux utiliser des livres d'exercices corrigés. Mais il ne faut pas consulter la solution sans avoir fait l'effort de chercher. Il est aussi conseillé de faire les sujets des années précédentes.

Il faut apprendre à rédiger proprement : justifier ses réponses et ne pas citer la conclusion d'un théorème sans vérifier les hypothèses.

Le jour du concours

Bien lire le sujet pour en comprendre la teneur et saisir l'enchaînement des questions.

Chercher au brouillon avant d'écrire au propre une solution claire et concise.

En cas de blocage sur une question, on doit prendre le temps de relire et de faire la synthèse de tous les résultats obtenus depuis le début, la réponse à la question posée est souvent une application immédiate de l'un de ces résultats.

Écrire lisiblement et encadrer les résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

- F. Liret, D. Martinais, *Cours de mathématiques. Analyse 2^e année*, éd. Dunod.
- R. Dupont, J.-P. Fleury, *Analyse, exercices avec solutions. Prépas écoles de commerce*, éd. Vuibert.
- C. Boy, A. Nizard, *Analyse mathématique, exercices et corrigés. Prépas économie*, éd. Armand Colin.
- F. Liret, D. Martinais, *Mathématiques pour le Deug : algèbre et géométrie 2^e année*, éd. Dunod.
- R. Dupont, *Algèbre linéaire, rappels de cours et exercices. Classes préparatoires*, éd. Vuibert.
- A. Denmat, F. Héaulme, *Algèbre linéaire, série T. D.*, éd. Dunod.
- C. Lebœuf et al., *Cours de probabilités et de statistiques*, éd. Marketing.
- A. Combrouze, *Probabilités 1 et 2. HEC, option scientifique*, éd. PUF, coll. « Major ».
- F. Dress, *Probabilités et statistiques, Deug sciences*, éd. Dunod.
- Tran Van Hiep, *Morceaux choisis de l'oral de mathématiques*, éd. PUF, coll. « Major ».
- Tran Van Hiep, *Mathématiques formulaire*, éd. PUF, coll. « Major ».

MATHÉMATIQUES

Ce cas a été rédigé par l'ESC Grenoble.

Durée : 2 heures.

MÉTHODOLOGIE ET CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé. Calculatrices autorisées.

Barème : 5 points pour l'exercice 1, 6 points pour l'exercice 2 et 9 points pour l'exercice 3.

SUJET

EXERCICE 1

Sur un bateau de croisière avec 576 passagers, sont proposés en un seul service deux menus n° 1 et n° 2. Les convives choisissent l'un des deux menus au hasard, avec équiprobabilité et indépendamment les uns des autres.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de menus n° 1 demandés.

1.a) Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

b) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?

2. La compagnie décide d'embarquer 300 menus n° 1 et 300 menus n° 2.

Déterminer la probabilité que chaque passager puisse recevoir le menu choisi.

3. La compagnie décide d'embarquer N menus n° 1 et N menus n° 2, et souhaite par ailleurs que la probabilité pour chaque passager de recevoir le menu choisi soit supérieure ou égal à 0,99.

Déterminer le nombre minimum N_m de menus n° 1 et n° 2 à embarquer.

Le tableau suivant comporte des valeurs de la fonction de répartition ϕ de la loi normale centrée réduite :

x	1	1,3	1,65	2,4	2,55	3,1
$\phi(x)$	0,87	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la notion de rang d'une matrice, montrer que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont les valeurs propres de A_n .

2. Si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, justifier que l'espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par $e_1 + e_2 - e_3$, tandis que l'espace propre associé à $1 + \frac{1}{n}$ est de dimension 2, engendré par $e_1 + e_2$ et $e_1 + e_3$.

3. Montrer que la matrice A_n est diagonalisable.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la matrice produit $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$ est diagonalisable en déterminant une matrice de passage P et une matrice diagonale D_n telles que $B_n = P D_n P^{-1}$.

EXERCICE 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de u_n .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \frac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $u_n - u_{n+1} = \frac{3}{4n} u_n$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} u_{n+1} x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$.

On notera S sa somme sur $] -R, R[$.

Soit l'équation différentielle : $(E) \quad 4(1-x)y' - y = 0$.

4. Montrer que S est solution de (E) .

5. Résoudre (E) sur $] -R, R[$.

6. Sachant que $u_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, déterminer l'expression de S sur $] -R, R[$.

