

MATHÉMATIQUES

Programme, conseils, bibliographie

PUBLIC CONCERNÉ

Tout candidat bachelier ayant suivi deux années universitaires (Licence 2 Sciences, Licence 2 Économie...) ou de niveau équivalent (BTS, IUT, classes préparatoires Math Spé...).

NATURE DE L'ÉPREUVE

Première partie

L'épreuve de mathématiques du concours Passerelle 1 a pour but de tester la bonne assimilation du programme par les candidats, leur capacité de raisonnement et leur aptitude à rédiger et expliquer.

Deuxième partie

Le sujet est composé de trois exercices indépendants portant sur l'algèbre linéaire, l'analyse et les probabilités-statistiques, conçus, sans grande difficulté théorique, de telle sorte qu'un candidat sérieusement préparé soit en mesure d'aborder l'ensemble des questions.

PROGRAMME

A) Algèbre linéaire

- a) Espaces vectoriels de dimension finie :
 - vecteurs de $\mathbb{R}^n$: opérations internes et externes sur $\mathbb{R}^n$ (généralisation à partir de $n = 2$ et $n = 3$) ;
 - structure d'espace vectoriel ;
 - dépendance et indépendance linéaires ;
 - vecteurs générateurs ;
 - base d'un espace vectoriel : définition.
- b) Matrices :
 - définition (tableau de nombres) ;
 - addition, multiplication par un scalaire, multiplication de deux matrices ;
 - calcul de l'inverse d'une matrice carrée et application à l'équation matricielle $AX = B$.
- c) Applications linéaires en dimension finie :
 - rang d'une application linéaire, formule reliant le rang, la dimension du noyau et celle de l'espace de départ ;
 - image par une application linéaire d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

B) Analyse

- a) Suites
- b) Fonctions numériques :
 - fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances ;

- limites, asymptotes ;
 - dérivation ;
 - primitives d'une fonction continue sur un intervalle ;
 - maxima et minima d'une fonction ;
 - représentation graphique.
- c) Calcul intégral :
- intégrale d'une fonction continue sur un segment ;
 - propriétés de l'intégrale ;
 - intégration par parties.

C) Statistiques et probabilités

- a) Définition d'une probabilité et propriétés ;
- b) Événements indépendants et dépendants relativement à une probabilité ;
- c) Variable aléatoire (ou aléa numérique) prenant un nombre fini de valeurs réelles ;
- d) Distribution (ou loi) de probabilité ;
- e) Fonction de répartition ;
- f) Espérance mathématique, variance, écart type ;
- g) Distributions usuelles de probabilité ;
- h) Distribution de Bernoulli, binomiale ;
- i) Distribution de Poisson : approximation de la distribution binomiale par la loi de Poisson ;
- j) Distribution normale.

CONSEILS DE PRÉPARATION

Après avoir bien lu le programme, le candidat doit noter les points inconnus ou trop flous.

Il doit avant tout revoir le cours pour consolider ou apprendre les différentes notions définies dans le programme, ainsi que les résultats (théorèmes et leurs corollaires...) qui en découlent. À chaque notion acquise, le candidat doit tester son degré d'assimilation en faisant de petits exercices.

Les différentes notions du programme étant acquises, le candidat doit faire beaucoup d'exercices et d'annales (en particulier du concours Passerelle 1) sans surtout se précipiter sur la correction.

BIBLIOGRAPHIE

- Jean-Marie Monier, *Cours et Exercices*, collection « J'intègre », éd. Dunod.
- Simon et Blume, *Mathématiques pour économistes*, éd. Économica.
- *Recueil d'exercices et résumés de cours*, coll. « Flash U », éd. Armand Collin.
- Tout livre d'analyse et d'algèbre linéaire de 1^{er} cycle universitaire (1^{re} année).

MATHÉMATIQUES

Ce cas a été rédigé par l'ESC Grenoble.

Durée : 2 heures.

CONSIGNES

Aucun document n'est autorisé. Calculatrices non autorisées.

Barème : exercice 1 : 6 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 8 points.



SUJET

EXERCICE 1

Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on tire successivement n boules de cette urne, avec remise de la boule dans l'urne après chaque tirage.

Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, on dit qu'il y a changement de couleur au i -ème tirage si la i -ème boule tirée n'a pas la même couleur que la $(i-1)$ -ème boule tirée.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements de couleur obtenus au cours des n tirages.

1. Justifier que la loi de X est donnée pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, par

$$P(X = i) = \frac{\binom{n-1}{i} \times 3 \times 2^i}{3^n}.$$

2. Reconnaître la loi de X ; puis donner son espérance et sa variance.

Rappel : Pour $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p}$ est aussi noté C_n^p .

EXERCICE 2

Le gardien d'un phare (pointé en A) situé à 3 km de la côte doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (pointée en B). Il se déplace en barque à la vitesse de 4 km.h^{-1} , et à pied à la vitesse de 5 km.h^{-1} . La côte est supposée rectiligne et la dérive due au courant, nulle. Si H est le point de la côte tel que la distance de A à H soit 3 km, la distance de H à B est 7 km.

Le problème est de savoir où le gardien doit accoster pour que le temps de parcours soit minimal.

1. Montrer que résoudre le problème revient à déterminer le minimum sur $[0; 7]$, de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{5}(7 - x)$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; 7]$.

3. Répondre au problème et donner la durée minimale du trajet.

EXERCICE 3

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant $\begin{cases} x_{n+1} = -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} = 6x_n + 12y_n \end{cases}$
avec $x_0 = -37$ et $y_0 = 17$. On pose $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

1.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, calculer $U_{n+1} - AU_n$.

b) En déduire une expression de U_n en fonction de A et de U_0 .

2. Calculer le rang de A et donner une base B_1 du noyau de A .

3. Montrer que l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2 .

4.a) Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on donnera.

5.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

b) Calculer D^n , et en déduire A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner x_n et y_n en fonction de n .

