

CORRIGÉ

Exercice 1

I - Une loi exponentielle et une suite

1. (a) Une densité de X est, par exemple, la fonction f donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On sait alors que $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \mathbb{P}(X \leq x)$.

- si $x < 0$, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.
- si $x \geq 0$, puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t} \right]_0^x = 1 - e^{-x}$$

2. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $\varphi(x) = e^x - x - 1$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x - 1$. De plus,

$$\varphi'(x) \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0.$$

La fonction φ est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$. Puisque $\varphi(0) = 0$, on en déduit alors le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

D'après le tableau précédent, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0$, et φ s'annule une et une seule fois (en 0).
Au final :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1 \quad \text{et} \quad e^x = x + 1 \iff x = 0.$$

- (b) La fonction F étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) est bien définie par récurrence.

Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1, u_n > 0$.

- D'après l'énoncé, $u_1 = 1$, donc $u_1 > 0$.
- Soit $n \geq 1$. Si on suppose que $u_n > 0$, alors $e^{-u_n} < 1$, d'où $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} > 0$.
- Par récurrence, on a bien que : $\forall n \geq 1, u_n > 0$.

- (c)

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
    U(n+1) = 1-exp(-U(n))
end
plot(U, "+")
```

(d) D'après le graphique obtenu, la suite (u_n) paraît décroissante, et de limite nulle.

(e) Soit $n \geq 1$. On a alors :

$$u_{n+1} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n = -(e^{-u_n} - (-u_n) - 1) = -\varphi(-u_n) \leq 0$$

La suite (u_n) est donc bien décroissante, ce qui confirme la conjecture de la question 1d.

(f) La suite (u_n) est donc décroissante, et minorée par 0, donc elle converge vers une limite finie ℓ .

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec F continue en ℓ , par passage à la limite dans l'égalité, on obtient $\ell = F(\ell)$, i.e. $g(\ell) = 0$, i.e. $\ell = 0$.

La suite (u_n) est donc bien convergente et admet 0 comme limite.

(g) Soit $n \geq 1$. On a :

$$u_{n+1} - \frac{u_n}{1+u_n} = 1 - e^{-u_n} - \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{e^{u_n}} \geq 0 \quad (\text{car } e^{u_n} \geq 1+u_n)$$

On a donc bien $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1+u_n}$ et par passage à l'inverse (les deux membres étant strictement positifs) :

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1+u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

On a donc bien montré successivement que :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1+u_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$$

(h) • D'après l'énoncé, $u_1 = 1$, donc $u_1 \geq \frac{1}{1}$.

• Soit $n \geq 1$. Si on suppose que $u_n \geq \frac{1}{n}$, alors $\frac{1}{u_n} \leq n$, d'où (d'après 2g) $\frac{1}{u_{n+1}} \leq n+1$, et on obtient

$$u_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}.$$

• Par récurrence, on a bien que : $\forall n \geq 1, u_n \geq \frac{1}{n}$.

Le vecteur-ligne S contient les sommes partielles de la suite (u_n) , i.e. contient les valeurs de la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \geq 1, S_n = \sum_{j=1}^n u_j$$

D'après le graphique, il semblerait que (S_n) diverge vers $+\infty$ (car il semblerait que $S_n > \ln(n)$ pour tout $n \geq 2$), ainsi, la série de terme général u_n semble diverger.

(i) D'après la question 2(h), on sait que : $\forall n \geq 1, u_n \geq \frac{1}{n}$. Or, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann), donc par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

II - Une fonction et une variable aléatoire à densité

1. Étude de la fonction g .

- (a) La fonction g est dérivable sur $] -\infty, 0[$ car elle est constante (nulle).

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de composées de fonctions dérivables.

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$, donc g est continue en 0 (et on a $g(0) = 0$)

Enfin, on a :

$$\forall x > 0, \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x)}{x} = e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

et

$$\forall x < 0, \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$$

La fonction g n'est donc pas dérivable en 0 (mais g est dérivable à droite et à gauche).

- (b) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $\forall x > 0, g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$. La fonction g est donc croissante sur $]0, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$.

De plus, d'après les croissances comparées usuelles, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. On en déduit ainsi le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$:

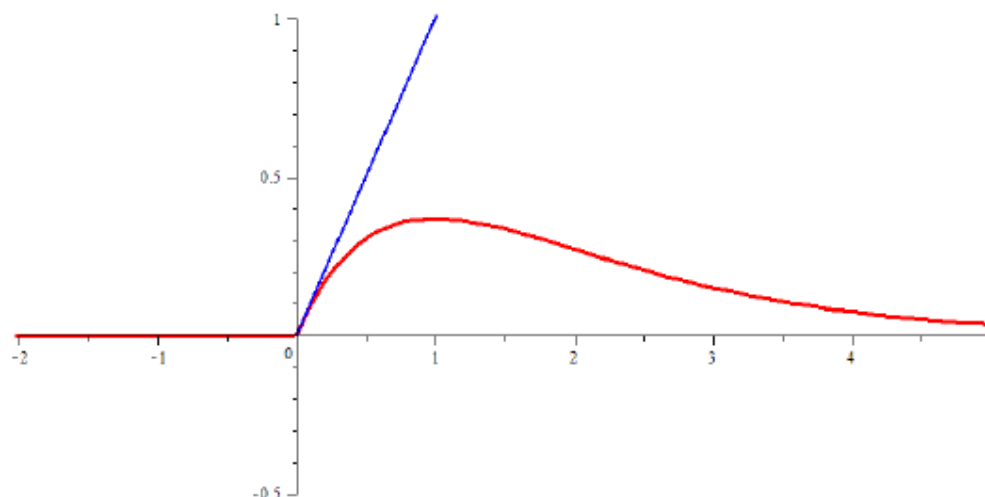
x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	0	e^{-1}	0

- (c) La fonction g est deux-fois dérivable sur $]0, +\infty[$ (car g' est dérivable) et on a : $\forall x > 0, g''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$. On a alors :

$$\forall x > 0, g''(x) \geq 0 \iff e^{-x}(x - 2) \geq 0 \iff x \geq 2.$$

La fonction g est donc concave sur $]0, 2[$ et convexe sur $]2, +\infty[$ (point d'inflexion au point d'abscisse 2).

- (d)



2. Étude de variables aléatoires.

- (a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0 d'après 1(a)). De plus, on a clairement que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 0$. Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} = \mathbb{E}[X] = 1$$

où X est la variable aléatoire définie dans la partie 1 (de loi exponentielle de paramètre 1).

Ainsi, g est bien une densité de probabilité.

- (b) La fonction g , densité de Y , étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction G est une primitive de g , donc est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- (c) On a pour tout réel x :

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$$

- si $x < 0$, on a $G(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

- si $x \geq 0$, on a $G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x te^{-t}dt$.

On procède à une intégration par parties en posant, pour $t \in [0, x]$, $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v étant bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, on a :

$$G(x) = \left[-te^{-t} \right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} + 1 - e^{-x} = 1 - e^{-x}(1+x)$$

On a donc bien finalement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- (d) On regarde si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ converge absolument, i.e. si l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ converge.

Or, on reconnaît ici $E(X^2)$ où X désigne la variable de loi exponentielle définie dans la partie 1, donc Y admet bien une espérance, et on a :

$$E(Y) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 1 + 1 = 2$$

3. (a) Remarquons déjà que $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$, puisque g est nulle sur $] -\infty, 0[$. On a donc $Z(\Omega) \subset [1, +\infty[$.

- Si $x < 1$, on a $H(x) = P(Z \leq x) = 0$

- Si $x \geq 1$, on a $H(x) = P(Z \leq x) = P(e^Y \leq x) = P(Y \leq \ln(x)) = G(\ln(x)) = 1 - \frac{1 + \ln(x)}{x}$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{x - 1 - \ln(x)}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- (b) Remarquons que la fonction H est continue sur $\mathbb{R}$ (elle l'est clairement sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et elle l'est en 1), et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ce qui est suffisant pour assurer que Z est une variable aléatoire à densité.

Par exemple, une densité h de Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{(1 - \frac{1}{x})x - (x - 1 - \ln(x))}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- (c) On regarde si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t \times h(t) dt$ converge absolument, i.e. si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ converge. Or, pour $t \geq e$, on a $\frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{1}{t}$ et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, donc par critère de comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge. Ainsi, Z n'admet pas d'espérance.

Exercice 2

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Par définition, φ_A est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, on a :

$$\forall M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi_A(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 = \lambda \varphi_A(M_1) + \varphi_A(M_2)$$

donc l'application φ_A est bien linéaire.

L'application φ_A est ainsi un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Si l'application φ_A est bijective, alors toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet un unique antécédant par l'application φ_A . En particulier, la matrice identité I_2 admet un unique antécédant $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_A(N) = I_2$, i.e. $AN = I_2$.
3. Si φ_A est un automorphisme, alors φ_A est bijectif, donc il existe une matrice N telle que $AN = I_2$, ce qui signifie par définition que A est inversible.
- Réciproquement, si A est inversible, alors :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi_A(M) = 0 \iff AM = 0 \iff A^{-1} \cdot (AM) = A^{-1} \cdot 0 \iff M = 0$$

donc $\text{Ker}(\varphi_A) = \{0\}$. L'endomorphisme φ_A est donc injectif, donc bijectif (endomorphisme en dimension finie) et φ_A est alors un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II - Un exemple

1. La matrice A est triangulaire, donc on lit ses valeurs propres directement sur sa diagonale : $Sp(A) = \{-1, 1\}$. La matrice A étant d'ordre 2 et admettant 2 valeurs propres distinctes, la matrice A est alors diagonalisable.
2. On calcule $\varphi(E_{1,1}) = E_{1,1}$, $\varphi(E_{1,2}) = E_{1,2}$, $\varphi(E_{2,1}) = 2E_{1,1} - E_{2,1}$ et $\varphi(E_{2,2}) = 2E_{1,2} - E_{2,2}$. On en déduit la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{B}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice T est triangulaire, donc on lit ses valeurs propres directement sur sa diagonale : $Sp(T) = \{-1, 1\} = Sp(\varphi_A)$.

Pour la valeur propre 1, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on a :

$$TX = X \iff \begin{cases} x + 2z = x \\ y + 2t = y \\ -z = z \\ -t = t \end{cases} \iff z = t = 0 \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $E_1(T) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, donc

$$E_1(\varphi_A) = Vect(E_{1,1}, E_{1,2})$$

et la famille génératrice obtenue étant clairement libre, c'est une base de $E_1(\varphi_A)$.

Pour la valeur propre -1 , en notant toujours $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on a :

$$TX = -X \iff \begin{cases} x + 2z = -x \\ y + 2t = -y \\ -z = -z \\ -t = -t \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -t \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

On a alors $E_{-1}(T) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc

$$E_{-1}(\varphi_A) = Vect(-E_{1,1} + E_{2,1}, -E_{1,2} + E_{2,2})$$

et la famille génératrice obtenue étant clairement libre, c'est une base de $E_{-1}(\varphi_A)$.

4. Puisque φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension 4, et qu'ici $\dim(E_1(\varphi_A)) + \dim(E_{-1}(\varphi_A)) = 2 + 2 = 4$, φ_A est donc bien diagonalisable.

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. On sait par hypothèse qu'il existe λ réel et M une matrice non nulle telle que :

$$\varphi_A(M) = \lambda M \implies AM = \lambda M \implies (A - \lambda I_2)M = 0$$

Si la matrice $A - \lambda I_2$ était inversible, il existerait alors une matrice B telle que $B(A - \lambda I_2) = I_2$, et alors l'identité précédente donne :

$$B(A - \lambda I_2)M = B.0 \implies M = 0 \quad \text{ce qui est absurde}$$

On a donc nécessairement $A - \lambda I_2$ non inversible.

2. On suppose que $AX = \mu X$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X \neq 0$. On a donc :

$$AX = \mu X \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} ax + by = \mu x \\ cx + dy = \mu y \end{cases}$$

La matrice N est non nulle, et on a : $\varphi_A(N) = AN = \begin{pmatrix} ax + by & 0 \\ cy + dy & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x & 0 \\ \mu y & 0 \end{pmatrix} = \mu N$. Ainsi, N est un vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre μ .

De même, N' est un vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre μ .

3. D'après la question 1, si $\lambda \in Sp(\varphi_A)$, alors $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, donc $\lambda \in Sp(A)$.
D'après la question 2, si $\mu \in Sp(A)$, alors μ est également une valeur propre de φ_A .
Par double inclusion, on a donc montré que :

$$Sp(\varphi_A) = Sp(A)$$

4. Supposons que A soit diagonalisable, alors il existe une base $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A . D'après la question 2, les quatre matrices $N_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{pmatrix}, N'_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}, N'_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$ sont 4 vecteurs propres de φ_A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La famille étant clairement libre, c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres : φ_A est diagonalisable.

Exercice 3

I - Une première expérience aléatoire

1.

```
N = input(' Donner un entier naturel non nul ');
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
    i = 1 ;
    M = N ;
    while grand(1,1,"uin",1,M) <> M
        i = i + 1 ;
        M = M - 1 ;
    end
    S(i) = S(i) + 1 ;
end
disp(S / 10000)
bar(S / 10000)
```

2. Sur 10000 essais, le nombre de 1, 2, 3, 4, 5 obtenus semble pratiquement le même, on peut conjecturer que X suit une loi uniforme sur $[1, 5]$.

3.

$$P(X = 1) = P(N_1) = \frac{1}{N}$$

$$P(X = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}$$

$$P(X = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}$$

4. Déjà, signalons que $X(\Omega) = [1, N]$.

Si $N \geq 4$, pour $k \in [1, N]$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \dots \times \frac{N-(k-1)}{N-(k-2)} \times \frac{1}{N-(k-1)} = \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Ainsi, X suit bien une loi uniforme sur $[1, N]$.

5. D'après le cours, on sait que $E(X) = \frac{N+1}{2}$.

II - Une deuxième expérience aléatoire

1. Si l'événement C_1 est réalisé, on procède à des tirages dans l'urne U_1 . On saura alors qu'on est dans l'urne U_1 au moment où on tirera la boule noire. Ce tirage pouvant se réaliser, de manière uniforme à chacun des N tirages (d'après la partie 1), on a :

$$\forall j \in [1, N], P_{C_1}(Y = j) = \frac{1}{N}$$

2. Si l'événement C_2 est réalisé, on procède à des tirages dans l'urne U_2 . Quoiqu'il arrive, on ne tirera donc que des boules blanches. Sur les $N-1$ premiers tirages, on tirera forcément des boules blanches et donc on ne saura pas dans quelle urne on fait les tirages (puisqu'a priori la boule noire peut être tirée au N -ième tirage). C'est uniquement au dernier tirage qu'on saura de manière certaine qu'on tire dans l'urne U_2 puisqu'aucune boule noire n'est tirée. On a donc :

$$\forall j \in [1, N-1], P_{C_2}(Y = j) = 0, \quad \text{et} \quad P_{C_2}(Y = N) = 1$$

3. Soit $j \in [1, N]$. La famille (C_1, C_2) formant un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = j) = P(C_1 \cap [Y = j]) + P(C_2 \cap [Y = j]) = P(C_1)P_{C_1}(Y = j) + P(C_2)P_{C_2}(Y = j)$$

Or, on sait que $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2}$, donc d'après les deux questions précédentes, on a :

$$\forall j \in [1, N-1], P(Y = j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2N}$$

et

$$P(Y = N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}$$

4.

$$E(Y) = \sum_{j=1}^N jP(Y = j) = \sum_{j=1}^{N-1} j \frac{1}{2N} + N \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \right) = \frac{N-1}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3N+1}{4}$$

III - Une troisième expérience aléatoire

1. Puisqu'il faut au moins deux tirages pour avoir obtenu au moins une boule de chaque couleur, on a $T(\Omega) \subset [2, +\infty[$. Réciproquement, pour tout entier $k \geq 2$, l'événement $[T = k]$ peut se réaliser (par exemple si on tire $k-1$ boules blanches puis 1 boule noire), donc

$$T(\Omega) = [2, +\infty[$$

2. Remarquons que :

$$[T = k] = [B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k] \cup [N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k]$$

Les événements étant incompatibles, puis les tirages se faisant de manière indépendance dans l'urne (on tire avec remise) :

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\ &= P(B_1)P(B_2) \dots P(B_{k-1})P(N_k) + P(N_1)P(N_2) \dots P(N_{k-1})P(B_k) \\ &= \left(\frac{N-1}{N} \right)^{k-1} \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N} \right)^{k-1} \frac{N-1}{N} \end{aligned}$$

3. Soit $K \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^K kP(T=k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=2}^K k \left(\frac{N-1}{N} \right)^{k-1} + \frac{N-1}{N} \sum_{k=2}^K k \left(\frac{1}{N} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K k \left(\frac{N-1}{N} \right)^{k-1} + \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^K k \left(\frac{1}{N} \right)^{k-1} - \frac{1}{N} - \frac{N-1}{N} \\ &\xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \times \frac{1}{(1 - \frac{N-1}{N})^2} + \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{N})^2} - 1 = N + \frac{N}{N-1} - 1 = \frac{N^2 - N + 1}{N-1} \end{aligned}$$

(on reconnaît des séries géométriques dérivées convergentes). Ainsi, T admet une espérance et on a :

$$E(T) = \frac{N^2 - N + 1}{N - 1}$$

4. (a) Remarquons que si $T = 2$ est réalisé, alors forcément sur les deux premiers tirages on a obtenu une boule noire et une boule blanche, on a donc :

$$P([U = 1] \cap [T = 2]) = P(T = 2) = \frac{1}{N} \frac{N-1}{N} + \frac{N-1}{N} \frac{1}{N} = \frac{2(N-1)}{N^2}$$

(b) Pour $k \geq 3$, on a :

$$[U = 1] \cap [T = k] = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

donc par indépendance des tirages,

$$P([U = 1] \cap [T = k]) = P(N_1)P(N_2) \dots P(N_{k-1})P(B_k) = \left(\frac{1}{N} \right)^{k-1} \frac{N-1}{N}$$

5. (a) Soit $j \geq 2$. On a :

$$[U = j] \cap [T = j+1] = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_j \cap N_{j+1}$$

donc par indépendance des tirages,

$$P([U = j] \cap [T = j+1]) = P(B_1)P(B_2) \dots P(B_j)P(N_{j+1}) = \left(\frac{N-1}{N} \right)^j \frac{1}{N}$$

(b) Soient j et k deux entiers tels que $j \geq 2$ et $k \geq 2$. Remarquons que T prend toujours une valeur strictement supérieure à celle de U .

$$\text{si } k \leq j, \quad P([U = j] \cap [T = k]) = 0$$

De plus, si sur $k > j+1$ tirages, on a obtenu j boules blanches, on a obtenu $k-j$ boules noires, avec $k-j > 1$, donc T ne peut pas valoir k (on aura déjà obtenu au moins une boule noire et une boule blanche en moins de k tirages), donc

$$\text{si } k \geq j+2, \quad P([U = j] \cap [T = k]) = 0$$

6. Puisque par exemple $P([U = 2] \cap [T = 2]) = 0$ alors que $P(U = 2) \neq 0$ et $P(T = 2) \neq 0$, les variables T et U ne peuvent pas être indépendantes.

7. La famille $([T = k])_{k \geq 2}$ formant un système complet d'événement, on a par la formule des probabilités totales et les résultats de la question 4 :

$$P(U = 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([U = 1] \cap [T = k]) = \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{N-1}{N} \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} = \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{1}{N^2} = \frac{2N-1}{N^2}$$

De même, en utilisant cette fois les résultats de la question 5, pour $j \geq 2$,

$$P(U = j) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([U = j] \cap [T = k]) = \mathbb{P}([U = j] \cap [T = j+1]) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j \frac{1}{N}$$

On a donc :

$$\forall j \geq 1, \quad P(U = j) = \begin{cases} \frac{2N-1}{N^2} & \text{si } j = 1 \\ \left(\frac{N-1}{N}\right)^j \frac{1}{N} & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,10 et un écart-type de 5,34, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Partie I

1. (a) Question de cours, bien traitée par une large majorité des candidats. Certains énoncent la formule du cours pour une loi exponentielle de paramètre λ , sans prendre la peine de remplacer λ par 1.
(b) Question bien traitée par une large majorité de candidats. Parmi les erreurs remarquées, certains candidats écrivent $\int_{-\infty}^x f(x)dx$ (confusion entre bornes et variables), ou alors oublient totalement le cas où $x < 0$.
2. (a) Question relativement bien traitée. Certains candidats utilisent à bon escient la convexité de la fonction exponentielle, puis étudient la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ pour vérifier l'égalité demandée. Les candidats ont parfois eu du mal à utiliser la stricte monotonie pour justifier l'égalité.
(b) Question bien traitée par une large majorité de candidats.
(c) Cette première question d'informatique était supposée accessible, et les correcteurs attendaient une écriture exacte de la ligne demandée. Il est dommage que ce type de question soit encore souvent négligé par les candidats, ou bien amène à des réponses incorrectes (peu ont vu que U est un tableau, et qu'il faut donc écrire $U(n)$ et non U dans le programme, ...)
(d) Les questions de ce type (conjecturer à l'aide d'une sortie graphique) sont bien réussies par les candidats, elles permettent de comprendre l'enchaînement des questions et donnent finalement les réponses des questions suivantes.
(e) Question bien traitée par une large majorité de candidats.

- (f) Le théorème de la limite monotone est parfois énoncé de façon fantaisiste ou approximative. Peu de candidats proposent un raisonnement complet étayé par tous les arguments fondamentaux (passage à la limite et continuité, unicité de la limite, résolution de l'équation du point fixe, ...).
- (g) La manipulation des inégalités est souvent hasardeuse. Les candidats appliquent souvent les fonctions de référence aux membres de l'inégalité sans préciser leur variation sur l'intervalle considéré.
- (h) L'hérédité n'est quasiment jamais réussie par les candidats.
- (i) L'observation de la divergence de la suite des sommes partielles n'est presque jamais explicitée et encore moins argumentée en comparant avec la courbe de la fonction $\ln$.
- (j) Beaucoup de candidats appliquent le critère de comparaison sans le citer explicitement, ou sans préciser/vérifier que le terme général de la suite est bien positif. D'autre part, le caractère divergent de la série de terme général $1/n$ est souvent mal justifié.

Partie II

1. (a) La plupart des candidats ont la bonne démarche en tête pour l'étude de la continuité en 0. Cependant pour la dérivabilité, pratiquement tous les candidats ont confondu la dérivabilité en 0 avec la dérivabilité à droite en 0, même si le résultat était en désaccord avec leurs résultats ultérieurs (graphique, ...).
- (b) Des erreurs de calcul au niveau de la dérivée, ce qui conduit a fortiori à des erreurs concernant les variations de g .
- (c) Certains candidats confondent convexe et concave.
- (d) Les représentations graphiques présentes dans les copies manquent très souvent bachelées. L'étude en 0 (demandée par l'énoncé) est souvent passée sous silence. Les correcteurs apprécient un tracé simple et soigné, où les éléments importants du graphe sont mis en valeur (axes, tangentes, asymptotes) et les copies répondant à ces critères sont valorisées.
2. (a) Très peu de candidats reconnaissent l'espérance d'une loi exponentielle, et calculent l'intégrale en perdant un peu de temps.
- (b) Beaucoup de candidats oublient l'argument fondamental de continuité sur $\mathbb{R}$ de la densité considérée g .
- (c) Question bien traitée dans l'ensemble.
- (d) La notion de convergence absolue est souvent ignorée par les candidats dans leur démarche visant à prouver l'existence d'une espérance pour Y .
3. (a) Cette question est souvent malmenée par les candidats, et les copies où un manque de rigueur est constant ne parviennent pas à donner de réponse correcte. La plupart des candidats font un calcul formel, faisant apparaître des « $\ln(x)$ » sans préciser x est strictement positif ou non. Très peu ont remarqué qu'il se passait quelque chose de différent selon si on était à gauche ou à droite de 1 et que cela avait une influence sur la valeur de $\ln(x)$. Rappelons que pour toute variable aléatoire, il peut être utile de regarder son support avant d'étudier sa fonction de répartition.
- (b) Des erreurs au niveau de calculs de dérivées ont été remarquées chez les quelques candidats qui ont abordé cette question.

Exercice 2

Partie I

1. Un nombre non négligeable de candidats confondent variable et paramètre, et considèrent la matrice A comme variable dans leur preuve de linéarité. Un nombre conséquent de candidats écrivent que « l'application est stable par combinaison linéaire ».

2. Cette question est rarement abordée correctement. Le résultat est souvent parachuté sans véritable raisonnement. La plupart des candidats a considéré que A était la matrice représentative de φ_A .
3. Cette question n'a quasiment jamais été abordée correctement. Les meilleures copies comprennent qu'il faut faire un raisonnement par double implication mais ne traitent alors que l'implication « facile ».

Partie II

1. De nombreux candidats confondent les critères d'inversibilité et de diagonalisabilité d'une matrice. Beaucoup de candidats écrivent par exemple que A est diagonalisable car triangulaire supérieure ne comportant pas de 0 sur la diagonale. Enfin, rappelons que toute matrice triangulaire n'est pas forcément diagonalisable. Certains candidats ont même cru remarquer en A une matrice symétrique . . .
2. La question a été bien traitée par une majorité de candidats.
3. Les raisonnements menés ici sont souvent peu compris des candidats. De graves confusions au niveau de la notation Vect ont pu être observées. Peu de candidats ont retranscrit les informations obtenues dans le contexte des matrices carrées pour l'endomorphisme φ_A et ont considéré comme résultat final le fruit de leur travail sur les matrices colonnes.
4. Ici, les correcteurs attendent des candidats qu'ils puissent conclure à l'aide de leurs résultats précédents en appliquant le critère de diagonalisabilité au programme, quelque soient les résultats (corrects ou non) qu'ils aient obtenu au préalable. Le théorème est en général connu, mais sa rédaction est souvent incorrecte (on lit souvent « La somme des sous-espaces propres vaut 4 », . . .)

Partie III

1. Beaucoup de candidats ont tenté d'aborder la question, mais très peu ont finalement mené le bon raisonnement. Le raisonnement par l'absurde semble peu maîtrisé. Très peu commencent par exemple en écrivant « Supposons que $A - \lambda I$ soit inversible ».
2. Le calcul de $\varphi_A(N)$ est souvent mené explicitement, mais très peu de candidats vérifient le caractère non nul de N pour le décrire en tant que vecteur propre.
3. Pratiquement aucun candidat ne voit le raisonnement par double inclusion dont il est question ici.
4. Quelques rares candidats ont compris le lien entre les sous-espaces propres de A et φ_A mais ont eu du mal à les formaliser.

Exercice 3

Partie I

1. Comme dans l'exercice 1, la question d'algorithmique est parfois négligée par les candidats. C'est d'autant plus dommage que la question est bien rémunérée dans le barème. Beaucoup de candidats se contentent de recopier l'algorithme sur leur copie, sans même compléter les instructions manquantes.
2. Peu de candidats ont finalement identifié la loi uniforme.
3. Les calculs sont corrects, mais la formule des probabilités composées n'est pas toujours écrite.
4. Les quelques candidats qui ont compris ce qui se passait écrivent le calcul général, et une majorité se trompe sur les derniers facteurs apparaissant dans le produit.
5. Ceux qui ont reconnu la loi uniforme connaissent en général bien la formule de l'espérance.

Partie II

1. Cette question est souvent traitée avec succès des candidats, avec des explications plus ou moins claires.
2. Même remarque.

3. Les candidats oublient souvent d'indiquer le système complet d'événements qu'ils utilisent, ou n'écrivent pas correctement la formule des probabilités totales.
4. La plupart des candidats sait quel calcul il doit mener, mais beaucoup luttent encore pour simplifier les notations Σ .

Partie III

1. On lit souvent $[2, N]$ comme ensemble de valeurs prises.
2. Le raisonnement est rarement argumenté correctement, notamment l'enchaînement incompatibilité puis indépendance en deux étapes.
3. On note de nombreuses tentatives des candidats, mais le fait que les séries commencent à 2 a considérablement gêné les candidats : soient ils ne s'en rendent pas compte et appliquent la formule du cours directement, soit ils se trompent lorsqu'ils retranchent le terme pour $k = 1$). La convergence de la série est très rarement énoncée, et encore plus rarement justifiée correctement.
4. Quelques bons candidats ont su aborder ces questions avec succès.
5. Quelques bons candidats ont su aborder ces questions avec succès.
6. Peu de candidats ont traité la question. Quand c'est fait, l'idée est correcte mais la rédaction peu précise dans la plupart des cas.
7. Peu de candidats ont traité la question.