PREMIER SUJET D'ANNALES : CORRIGES

[Exercice 1]

On considère la suite numérique u_n définie par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$ et de premier terme $u_1 = 12$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Soit la suite v_n définie, pour tout entier naturel $n \geq 1$, par : $v_n = u_n - \frac{15}{2}$.
   a. Démontrer que la suite v_n est une suite géométrique. Déterminer la raison de la suite et son premier terme.
   b. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n.

1. La suite u_n est définie par récurrence, il suffit donc de partir du premier terme de la suite pour trouver les termes suivants.

$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 5 = \frac{1}{3} \times 12 + 5 = 9$ $\qquad$ $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 5 = \frac{1}{3} \times 9 + 5 = 8$

2. a. Soit n un entier naturel non nul, v_n est une suite géométrique si le rapport entre deux termes consécutifs est constant, autrement dit si le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{15}{2}}{u_n - \frac{15}{2}} = \frac{\frac{1}{3}u_n + 5 - \frac{15}{2}}{u_n - \frac{15}{2}} = \frac{\frac{1}{3}u_n - \frac{5}{2}}{u_n - \frac{15}{2}} = \frac{\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{15}{2}\right)}{u_n - \frac{15}{2}} = \frac{1}{3}$$

v_n est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{15}{2}$ $= 12 - \frac{15}{2} = \frac{9}{2}$.

b. Puisque v_n est une suite géométrique de premier terme v_1 nous pouvons exprimer le terme général de la suite en fonction de n : $v_n = v_1 q^{n-1}$.

Par conséquent nous pouvons écrire que $v_n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ or il exixte un lien entre u_n et v_n :

$u_n = v_n + \frac{15}{2}$ donc $u_n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{15}{2}$.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N° 1 – CORRIGES

[Exercice 2]

1. On achète 4 sandwichs poulet-crudité et 5 canettes de jus d'orange pour 22 euros, puis 3 sandwichs poulet-crudité et 7 canettes de jus d'orange pour 23 euros. Que coûteraient 5 sandwichs poulet-crudité et 3 canettes de jus d'orange ? La méthode de résolution sera détaillée.
2. Résoudre l'équation $x^2 - x - 2 = 0$. La méthode de résolution sera détaillée.

1. Il s'agit ici de poser puis de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

   Soit x la variable associée au prix d'un sandwich et soit y la variable associée au prix d'une canette de jus d'orange. De l'énoncé nous pouvons déduire le système suivant :

   $$\begin{cases} 4x + 5y = 22 \\ 3x - 7y = 23 \end{cases}$$

   Nous allons le résoudre en appliquant la méthode de résolution par addition.

   Pour éliminer la variable x, il faut multiplier la première équation par -3 et la deuxième équation par 4.

   $$\begin{cases} 4x + 5y = 22 \\ 3x - 7y = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 15y = -66 \\ 12x + 28y = 92 \end{cases}$$

   En additionnant les deux équations on obtient $13y = 26$ soit $y = 2$ et il suffit de remplacer maintenant y dans la première équation pour obtenir x : $4x + 5 \times 2 = 22$ soit $x = 3$.

   Le sandwich est donc vendu à 3 € et la canette de jus d'orange est vendue à 2 €.

   Par conséquent 5 sandwichs et 3 canettes de jus d'orange coûteraient 21 €.

2. Il s'agit ici de résoudre une équation du second degré à une inconnue de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

   La première étape est le calcul du discriminant :

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

   Le discriminant est strictement positif, il y a donc deux solutions.

   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - 3}{2} = -1$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 3}{2} = 2$

   $S = \{-1 ; 2\}$

[Exercice 3]

Dans un pays trois opérateurs (Orange, Bleu, Vert) se partagent le marché de la téléphonie mobile. On considère que les abonnés ont soit la 3G soit la 4G et on considère qu'ils sont abonnés auprès d'un opérateur unique.

31,25 % des abonnés ont la 3G et sont abonnés chez l'opérateur Vert, 62,5 % des abonnés ont la 3G, et 1/3 des abonnés ayant la 4G sont abonnés auprès de l'opérateur vert, 56,25 % des abonnés ont un abonnement auprès de l'opérateur Orange ou Bleu.

1. Exprimer sous forme de probabilités les différents pourcentages ou proportions de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Vert et qu'il ait la 4G.
3. Calculer la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Vert.

Soit 3G l'événement « un abonné a la 3G », soit 4G l'événement « un abonné a la 4G » et enfin soit V l'événement « un abonné a pour opérateur la société Vert ».

1. $P(3G \cap V) = 0{,}3125$

   $P(3G \cap V) = 0{,}3125$ désigne la probabilité qu'un abonné ait la 3G et qu'il soit abonné chez l'opérateur Vert.

   Remarque : le signe $\cap$ désigne l'intersection de deux événements.

   $P(3G) = 0{,}625$ $P(3G)$ désigne la probabilité qu'un abonné ait la 3G.

   $P_{4G}(V) = \dfrac{1}{3}$

   $P_{4G}(V)$ désigne une probabilité conditionnelle, il s'agit de la probabilité qu'un client soit abonné chez l'opérateur vert sachant qu'il a la 4G.

   $P(O \cup B) = 0{,}5625$

   $P(O \cup B)$ désigne la probabilité qu'un abonné ait un abonnement chez Orange ou qu'il ait un abonnement chez Bleu.

   Remarque : le signe $\cup$ désigne la réunion de deux événements.

2. Soient A et B deux événements quelconques, nous savons que la probabilité de A sachant que B a eu lieu est égale à :

   $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ donc $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ de la même manière nous pouvons écrire que $P(V \cap 4G) = P_{4G}(V) \times P(4G)$.

   Puisque les abonnés ont soit la 3G soit la 4G nous savons que $P(4G) = 1 - P(3G)$.

   Donc $P(V \cap 4G) = \dfrac{1}{3} \times (1 - 0{,}625) = 0{,}125$.

3. Si un client est abonné chez l'opérateur vert, il a soit la 3G soit la 4G par conséquent nous pouvons écrire que $P(V) = P((3G \cap V) \cup (V \cap 4G))$.

   Nous savons que si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ par conséquent puisque les événements $(3G \cap V)$ et $(V \cap 4G)$ sont incompatibles nous pouvons écrire $P(V) = P(3G \cap V) + P(4G \cap V)$ donc $P(V) = 0{,}3125 + 0{,}125 = 0{,}4375$.

   Une autre version possible est de se dire que si un abonné est chez l'opérateur Vert il n'est pas chez Orange, ni chez vert, il suffit donc d'utiliser la probabilité de l'événement contraire $P(V) = 1 - P(O \cup B) = 1 - 0{,}5625 = 0{,}4375$.

[Exercice 4]

$$f(x) = 5x + 2 + \frac{1}{5x-1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Calculer la dérivée de cette fonction.
3. Donner (sans calculer les limites et les extremums) le tableau de variation de cette fonction.

1. Le domaine de définition de la fonction f noté D_f est l'ensemble des réels privés de 1/5 soit $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

2. La fonction f est la somme d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle, la fonction f est dérivable sur son domaine de définition.

   Nous savons que $(ax + b)' = a$ et que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u}{u^2}$ par conséquent la dérivée de la fonction f notée f' est égale à $f'(x) = 5 - \frac{5}{(5x-1)^2} = \frac{5(5x-1)^2 - 5}{(5x-1)^2} = \frac{5((5x-1)^2 - 1)}{(5x-1)^2}$

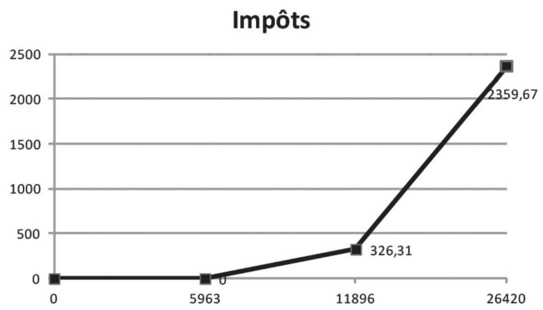
   Nous remarquons la présence d'une identité remarquable de la forme : $a^2 - b^2$ or $a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$, nous allons donc utiliser la forme factorisée pour simplifier la dérivée.

   $$f'(x) = \frac{5(5x-1-1) \times (5x-1+1)}{(5x-1)^2} = \frac{5(5x-2)(5x)}{(5x-1)^2} = \frac{(25x)(5x-2)}{(5x-1)^2}$$

3. Pour déterminer le sens de variation d'une fonction il est nécessaire d'étudier le signe de sa dérivée sur son domaine de définition. Le signe de la dérivée dépend ici de trois facteurs.

x	$-\infty$ … 0	0 … $1/5$	$1/5$ … $2/5$	$2/5$ … $+\infty$
$25x$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$5x - 2$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$(5x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
Signe de $f'(x)$	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
Sens de variation de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

[Exercice 5]



Sur ce graphique est représentée la courbe (composée ici de segments) permettant de calculer le montant de l'impôt sur le revenu à partir d'un revenu imposable compris entre 0 et 26 420 €.

Par exemple pour un revenu imposable de 26 420 €, l'impôt devrait être égal à 2 359,67 €.

1. Quel serait le montant d'impôt à payer pour un revenu de 5 900 € ?
2. Déterminer la fonction modélisant le segment représenté entre 11 896 € et 26 420 €.
3. En déduire le montant d'impôt à payer pour un revenu de 25 000 €.

1. Par lecture graphique nous constatons que pour un revenu de 5 900 €, l'impôt sur le revenu devrait être égal à 0.

2. Il est nécessaire ici de déterminer l'équation de la droite passant par les points de coordonnées (11 896 ; 326,31) et (26 420 ; 2 359,67). L'équation d'une droite s'écrit $y = ax + b$. Il suffit donc de déterminer les coefficients a et b sachant que la droite passe par les deux points cités précédemment :

   $f(11\ 896) = 326{,}31$ et $f(26\ 420) = 2\ 359{,}67$.

On obtient par conséquent un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 11\,896\,a + b = 326{,}31 & (E_1) \\ 26\,420\,a + b = 2\,359{,}67 & (E_2) \end{cases}$$

Nous allons résoudre le système par la méthode d'addition (ou de soustraction)
$E_2 - E_1 \Rightarrow 14\,524\,a = 2\,033{,}36 \Rightarrow a = 0{,}14$.

En remplaçant le coefficient a dans la première équation on obtient :
$11\,896 \times 0{,}14 + b = 326{,}31 \Rightarrow b = -\,1\,339{,}13$.

La fonction modélisant le segment représenté entre 11 896 € et 26 420 € est :
$f(x) = 0{,}14x - 1\,339{,}13$.

3. Maintenant que nous avons la fonction permettant de calculer le montant d'impôt pour un revenu compris entre 11 896 € et 26 420 €, il suffit de remplacer dans la fonction trouvée à la question précédente x par 25 000 €.

   $f(25\,000) = 0{,}14 \times 25\,000 - 1\,339{,}13 = 2\,160{,}87$ €

   Soit un impôt de 2 160,87 €.

[Exercice 6]

Une agence de location propose des voitures de courses de collection au même prix, elle a trois voitures.

Une enquête a été réalisée sur 14 jours afin de connaître la répartition du nombre de voitures louées par jour. Les résultats son présentés dans le tableau suivant.

Numéro du jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nombre de voitures louées	0	1	2	2	0	3	3	1	2	1	0	2	2	1

1. Présenter la distribution statistique de la variable nombre de voitures louées par jour sous forme de tableau. (Valeurs et effectifs)
2. Calculer le nombre moyen de voitures louées par jour.
3. Calculer le nombre médian de voitures louées. (Préciser la méthode utilisée)

1. Présenter la distribution statistique d'une variable statistique consiste à présenter les valeurs possibles de la variable avec en parallèle les effectifs associés.

Nombre de voitures louées (x_i)	**Nombre de jours (n_i)**	**ECC pour la question 3**
0	3	3
1	4	7
2	5	12
3	2	14
Total	14	

2. Nous devons ici calculer une moyenne arithmétique pondérée.

   $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\text{N}} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 2}{14} = 1{,}43$, N désignant l'effectif total de la série.

3. Pour déterminer la médiane d'une série discrète dont l'effectif est pair il est nécessaire de déterminer les valeurs situées au rang N/2 et N/2 + 1 en utilisant les effectifs cumulés croissants notés ECC.

   Valeur située au rang 7 : 1

   Valeur située au rang 8 : 2

   La médiane est donc la moyenne arithmétique simple de ces deux valeurs.

   La médiane est donc une valeur théorique, elle est de 1,5 voiture.