SECOND SUJET D'ANNALES : CORRIGES

[Exercice 1]

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 suivant la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	x	0,3

1. Calculer x.
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre impair ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir un multiple de 3 ».
4. Calculer la probabilité de l'événement A ou B.

L'univers de l'expérience aléatoire est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; notons p_i la probabilité de l'événement élémentaire $\{x_i\}$, $p\{x_i\} = p_i$.

1. Calcul de x. La somme de tous les p_i vaut 1 : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$,
   $0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,2 + x + 0,3 = 1$. Comme $0,9 + x = 1$ on a $x = 0,1$, c'est la probabilité de l'événement élémentaire $\{5\}$.

2. L'événement A est A= $\{1 ; 3 ; 5\}$. $p(\text{A})$ est la somme des probabilités des événements élémentaires $\{1\}$, $\{3\}$ et $\{5\}$:
   $p(\text{A}) = p\{1\} + p\{3\} + p\{5\} = 0,1 + 0,1 + 0,1$. Donc $p(\text{A}) = 0,3$.

3. L'événement B est B = $\{3 ; 6\}$ et $p(\text{B})$ est la somme des probabilités des événements élémentaires $\{3\}$ et $\{6\}$. Donc $p(\text{B}) = p\{3\} + p\{6\} = 0,1 + 0,3 = 0,4$.

4. L'événement $\text{A} \cup \text{B}$ c'est la **réunion** des événements A et B et correspond à l'événement obtenir un nombre impair **ou** un nombre multiple de 3.
   L'événement $\text{A} \cap \text{B}$ c'est l'**intersection** des événements A et B et correspond à l'événement obtenir un nombre impair **et** un nombre multiple de 3.
   On sait que $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B})$.
   Comme $\text{A} \cap \text{B} = \{3\}$, on trouve $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\{3\}) = 0,1$.
   On en déduit $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,3 + 0,4 - 0,1 = 0,6$; $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,6$.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N° 2 – CORRIGES

[Exercice 2]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par, $u_{n+1} = u_n/(1 - 2u_n)$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Quelle est la nature de (u_n), suite arithmétique ? géométrique ?
3. Soit la suite $v_n = 1 - 1/u_n$. Montrer que (v_n) est arithmétique et déterminer sa raison.

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - 2u_n}$ et $u_0 = 1$.

1. On utilise la relation de récurrence et le premier terme de la suite pour effectuer les calculs suivants.

   On a $u_0 = 1$ et on a ainsi $u_1 = 1/(1 - 2 \times 1) = 1/{-1} = -1$.

   De plus $u_2 = -1/[1 - 2(-1)] = -1/3$ et pour le suivant $u_3 = (-1/3)/[1 - 2(-1/3)] = -1/5$.

2. Soit n un entier naturel. Une suite (u_n) est appelée arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. On remarquera, par exemple, que $u_3 - u_2 = -2/15 \neq u_2 - u_1 = -4/3$. Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

   Soit n un entier naturel. Une suite (u_n) est dite géométrique lorsque le quotient u_{n+1}/u_n est constant. Si on considère, par exemple, $u_3/u_2 = 3/5 \neq u_2/u_1 = 1/3$ on en déduit que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. Soit n un entier naturel et la suite $v_n = 1 - 1/u_n$. Calculons d'abord $v_{n+1} - v_n$.

   $v_{n+1} - v_n = 1 - 1/u_{n+1} - (1 - 1/u_n) = 1/u_n - 1/u_{n+1} = 1/u_n - (1 - 2u_n)/u_n = (1 - 1 + 2u_n)/u_n = 2$.

   Pour tout n entier naturel $v_{n+1} - v_n = 2$. Ceci montre que (v_n) est une suite arithmétique de raison r.

[Exercice 3]

1. Donner l'expression de $(a + b)^n$.
2. Déterminer le coefficient binomial C_{10}^3.
3. Donner une expression de 3^n en utilisant la question 1.

Soit n un entier naturel.

1. Le développement de $(a + b)^n$ s'exprime à l'aide des coefficients binomiaux :

   $\binom{n}{k} = n!/[(n-k)!\,k!]$.

   $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$.

2. $\binom{10}{3} = \dfrac{10\,!}{(10-3)\,!\,3\,!} = \dfrac{10\,!}{7\,!\,3\,!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120.$

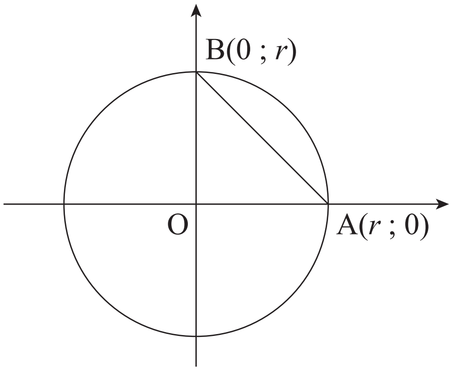
3. On pose $3^n = (1 + 2)^n$ et on applique le développement précédent :
$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}.$

[Exercice 4]

Soit C un cercle tracé dans un repère orthogonal de rayon r et centre (0 ; 0).

1. Rappeler la formule qui donne l'aire de ce cercle.
2. Sachant que son périmètre est 6π, déterminer la mesure de son rayon.
3. Déterminer la longueur des trois côtés du triangle ayant pour sommets les points (0 ; 0), (r ; 0) et (0 ; r).

1. Soit un nombre réel tel que $r > 0$. L'aire du cercle de rayon r est donnée par πr^2.



2. Le périmètre de ce cercle est donné par $2\pi r$, s'il mesure 6π on a $2\pi r = 6\pi$, et on en déduit $r = 3$.

3. Les axes des coordonnées sont orthogonaux donc il s'agit d'un triangle rectangle (l'angle en (0 ; 0) est un angle droit). Les sommets sont les points O(0 ; 0), A(3 ; 0) et B(0 ; 3), par conséquent les côtés OA et OB mesurent 3 unités. Par le théorème de Pythagore on en déduit la mesure de l'hypoténuse AB, donnée par $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

[Exercice 5]

On note x la valeur initiale d'un produit.

1. Après deux remises successives de 8 % et une augmentation de 5 %, ce produit atteint la valeur de 8 887,20 euros. Déterminer la valeur x de ce produit.
2. Déterminer la valeur de ce produit dans 3 ans et puis dans 5 ans sachant qu'il subit une augmentation de 3 % par an.
3. Déterminer la valeur de ce produit en fonction de n après n années sachant que l'augmentation par an est de 3 %.

1. Après une remise de 8 % la valeur du produit revient à $x - x \times 0{,}08 = x(1 - 0{,}08)$ et après la deuxième remise de 8 % cette valeur s'élève à :
   $x(1 - 0{,}08) \times (1 - 0{,}08) = x(1- 0{,}08)^2$.
   Ainsi une augmentation de 5 % sur cette dernière valeur correspond à :
   $x(1 - 0{,}08)^2\ (1 + 0{,}05) = 0{,}88872.x$.
   Comme $x.0{,}88872 = 8\ 887{,}2$, la valeur initiale du produit est $x = 10\ 000$ euros.

2. Le produit augmente de 3 % par an. En trois ans la valeur du produit s'élève à
   $10\ 000(1 + 0{,}03)(1 + 0{,}03)(1 + 0{,}03) = 10\ 000(1 + 0{,}03)^3 = 10\ 927{,}27$.
   Après 5 ans : $10\ 000(1 + 0{,}03)^5 = 11\ 592{,}74$.

3. La valeur du produit évolue selon une progression géométrique de raison 1,03 et de premier terme 10 000, ainsi la valeur dans n années sera de $10\ 000 \times 1{,}03^n$.

[Exercice 6]

On considère la fonction $f(x) = \ln x - \ln (x^2 + 1)$.

1. Déterminer le domaine de $f(x)$.
2. Déterminer les points où $f(x)$ s'annule.
3. Déterminer la dérivée de $f(x)$.

Soient a et b deux nombres réels positifs et non nuls alors on sait que $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$.

1. Le domaine de définition de la fonction $\ln(x)$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbb{R}_+^*$.
   – La fonction $g(x)= \ln(x^2 + 1)$ est la composée d'une fonction logarithme et d'une fonction polynôme du deuxième degré, $x^2 + 1$, son domaine de définition est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ pour lesquels le polynôme $x^2 + 1$ est strictement positif.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N° 2 – CORRIGES

– La fonction polynôme $x^2 + 1$ est telle que $x^2 + 1 > 0$ sur l'ensemble des nombres réels. Donc l'ensemble de définition de $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ est $\mathbb{R}$. Par conséquent le domaine de définition de $f(x)$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs $\mathbb{R}_+^*$.

Remarquons que la fonction $f(x) = \ln x - \ln(x^2 + 1)$ peut s'écrire $f(x) = \ln[x/(x^2 + 1)]$.

2. On sait que la fonction $\ln(x)$ est strictement croissante et s'annule si $x = 1$.

   Donc $f(x) = \ln[x/(x^2 + 1)]$ s'annule si et seulement si $x/(x^2 + 1) = 1$, si et seulement si $x = x^2 + 1$, ce que revient à dire que $f(x) = \ln[x/(x^2 + 1)]$ s'annule lorsque x est racine du polynôme du 2e degré $x^2 - x + 1 = 0$.

   Calculons les racines de $x^2 - x + 1 = 0$.

   $$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4(1 \times 1)}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(1 \times 1)}}{2}.$$

   $$x_1 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

   Comme x_1 et x_2 ne sont pas des nombres réels, il s'ensuit que la fonction $f(x) = \ln[x/(x^2 + 1)]$ ne s'annule pas sur son ensemble de définition.

3. La fonction $\ln(x)$ est dérivable sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs et sa dérivée est $1/x$; en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, on voit que la dérivée de $\ln u(x)$, où $u(x) > 0$, est $u'(x)/u(x)$ donc la dérivée de $\ln(x^2 + 1)$ est $2x/(x^2 + 1)$.

   La fonction $f(x)$ est la différence de deux fonctions dérivables donc est dérivable et sa dérivée vaut :

   $f'(x) = 1/x - 2x/(x^2 + 1) = (x^2 + 1 - 2x^2)/x(x^2 + 1) = (1 - x^2)/x(x^2 + 1)$.

   Attention : sur l'ensemble des nombres réels on ne peut pas factoriser le polynôme du 2e degré $x^2 + 1 = 0$ parce que ses racines ne sont pas des nombres réels.