المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
11-07-2002

Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée : 3Heures)

Avertissement :

- *Les 4 exercices doivent être traités sur des feuilles séparées.*
- *Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.*

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable et de même espérance m telle que : $\forall n \geq 1$, $\forall p \geq 1$, $\mathrm{Var}(X_n + + X_{n+p-1}) \leq Kp^\gamma$ où K est une constante strictement positive et où $0 < \gamma < 1$. On se propose de démontrer que

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m \quad \text{presque sûrement et en moyenne quadratique.}$$

1) a) Montrer que l'on peut supposer $m = 0$.

b) On suppose dorénavant que $m = 0$. Etablir directement que $\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0$ en moyenne quadratique, lorsque $n \to +\infty$.

c) On se donne un entier $k > 1/(2-\gamma)$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{p\geq 1} P\left(\left|\frac{S_{p^k}}{p^k}\right| \geq \varepsilon\right) < +\infty.$$

En déduire que $\frac{S_{p^k}}{p^k} \longrightarrow 0$, presque sûrement, lorsque $p \to +\infty$.

2) On pose pour $p \geq 1$, $Y_p = \max\limits_{p^k < n \leq (p+1)^k} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_{p^k}}{n}\right)^2$.

a) Montrer que $E(Y_p) \leq \frac{K}{p^{2k}}\left[(p+1)^k - p^k\right]^2$.

b) En déduire que $Y_p \longrightarrow 0$, p. s., lorsque $p \to +\infty$.

3) On pose $p(n)$ l'entier qui vérifie $p(n)^k < n \leq (p(n)+1)^k$.

a) Montrer que

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{p(n)^k}}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{presque sûrement, lorsque } n \to +\infty.$$

b) En déduire que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers 0, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2

Soient $(E, <.,.>_E)$, $(F, <.,.>_F)$ des espaces de Hilbert réels, de dimension infinie, séparables. Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(f_n)_{n\geq 1}$) une famille orthonormale de E (resp. F). Pour tout $u \in E$, tout $v \in F$, on définit $v \otimes u \ : \ E \longrightarrow F$ par : $(v \otimes u)(x) = <x, u>_E v$ pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues sur E et, pour $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $\|A\| = \sup\{\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \ ; \ x \in E \ , \ x \neq 0\}$ la norme naturelle de $\mathcal{L}(E, F)$.

1) a) Démontrer que $v \otimes u \in \mathcal{L}(E, F)$ et calculer sa norme.

b) Décrivez $\mathrm{Im}(v \otimes u)$ et $\mathrm{Ker}(v \otimes u)$. Déterminer $(v \otimes u)^*$, l'adjoint de $v \otimes u$.

c) Si $u_1 \in E$, $u_2 \in E$, $v_1 \in F$, $v_2 \in F$, vérifier que $(v_1 \otimes u_1) \circ (u_2 \otimes v_2) = (v_1 \otimes u_2) \circ (u_1 \otimes v_2)$.

2) Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels bornée. On pose pour tout $x \in E$:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (f_n \otimes e_n)(x).$$

Démontrer qu'on définit ainsi $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Calculer $\|A\|$. Déterminer A^*.

3) On suppose que $\lambda_n \neq 0$ pour tout n.

a) Démontrer que A est injective si et seulement si (e_n) est une base hilbertienne de E.

b) Démontrer que $\mathrm{Im}(A)$ est partout dense dans F si et seulement si (f_n) est une base hilbertienne de F.

4) On suppose qu'il existe α et β réels tels que $0 < \alpha \leq |\lambda_n| \leq \beta$ pour tout n. A quelle(s) condition(s) A^{-1} existe-t-il, avec $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$? Déterminer A^{-1}.

Exercice 3

Soit f la fonction périodique de période 1 qui vaut 1 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et -1 sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$. Soit $S_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} \left(\int_0^1 f(t) e^{-2i\pi m t} dt\right) e^{2i\pi m x}$, la somme partielle de la série de Fourier au rang n, associée à la fonction f, au point x.

1) Vérifier que

$$S_n(x) = \int_{-x}^{x} D_n(t)dt - \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(t)dt$$

où D_n est le noyau de Dirichlet $\left(D_n(t) = \dfrac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)$.

2) Montrer qu'il existe $K_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$:

$$\left| S_n(x) - \int_{-x}^{x} D_n(t)dt \right| \leq \frac{K_1}{n}$$

3) Montrer qu'il existe $K_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$:

$$\left| \int_{-x}^{x} D_n(t)dt - \int_{-x}^{x} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t} \right| \leq \frac{K_2}{n}$$

4) Montrer que, pour $n \geq 2$, la fonction $g_n(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t} dt$ atteint son maximum absolu sur $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ au point $x = \dfrac{1}{2n+1}$ et que la valeur de ce maximum ne dépend pas de n.

Montrer que la suite $S_n(\frac{1}{2n+1})$ est convergente et que sa limite est strictement supérieur à 1.

En déduire que la convergence de $S_n(x)$ vers $f(x)$ n'est uniforme sur aucun voisinage de 0.

Exercice 4

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tel que $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$ ($\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$).

1) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $f(x) > f(x_0)$ pour tout $x \notin B_R$, avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \,;\, \|x\| \leq R\}$.

2) Montrer qu'il existe $M_1 > 0$ tel que $| < H(x)y, y > | \leq M_1\|y\|^2$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et tout $x \in B_{R+1}$ ($< .,. >$ désigne le produit scalaire euclidien, $H(x)$ est la matrice hessienne de f au point x et R est donné à la question 1)

3) On suppose x_n connu ($n \in \mathbb{N}$). On pose $\omega_n = -\nabla f(x_n)$ où $\nabla f(x_n)$ désigne le gradient de f en x_n. Si $\omega_n = 0$, on pose $x_{n+1} = x_n$. Si $\omega_n \neq 0$, montrer qu'il existe $\bar{\rho} > 0$ tel que $f(x_n + \bar{\rho}\omega_n) \leq f(x_n + \rho\omega_n)$ pour tout $\rho \geq 0$. On *choisit* alors un $\rho_n > 0$ tel que $f(x_n + \rho_n\omega_n) \leq f(x_n + \rho\omega_n)$ pour tout $\rho \geq 0$ et on pose $x_{n+1} = x_n + \rho_n\omega_n$.

On considère, dans les questions suivantes, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite.

4) Montrer que (avec R et M_1 donnés aux questions précédentes) :

(a) La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente,

(b) $x_n \in B_R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(c) $f(x_n + \rho\omega_n) \leq f(x_n) - \rho\|\omega_n\|^2 + \dfrac{1}{2}\rho^2 M_1\|\omega_n\|^2$ pour tout $\rho \in \left[0, \frac{1}{\|\omega_n\|}\right]$.

(d) $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \dfrac{\|\omega_n\|^2}{2M_1}$, si $\|\omega_n\| \leq M_1$,

(e) $-f(x_{n+1}) + f(x_n) \geq \dfrac{\|\omega_n\|^2}{2M}$, avec $M = \sup(M_1, M_2)$, $M_2 = \sup\{\|\nabla f(x)\| \,;\, x \in B_R\}$.

5) Montrer que $\nabla f(x_n) \longrightarrow 0$ (quand $n \to +\infty$) et qu'il existe une sous suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} \longrightarrow x$ quand $k \to +\infty$ et $\nabla f(x) = 0$.

6) On suppose qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Montrer que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et que $x_n \longrightarrow \bar{x}$ quand $n \to +\infty$.