المعهد الوطني للبريد و المواصلات
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
28-06-2001

Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée :3Heures)

Avertissement :

-L'appréciation des copies tient compte de la rigueur ,de la clarté des raisonnements et de la présentation.
-Encadrer vos résultats.

ANRT
Agence Nationale de Réglementation des Télécommunications

PARTIE I

EXERCICE 1 :

Soient a, b et c trois réels fixés. On définit par récurrence la suite (v_n) de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_0 = a \ , \ v_1 = b \ , \ v_2 = c \\ v_{n+3} = \dfrac{v_n + v_{n+1} + v_{n+2}}{3} \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose $V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) **a)** Montrer que pour tout $n \geq 0$, $V_{n+1} = AV_n$. En déduire l'expression de V_n en fonction de A, n et V_0.

b) Montrer que 1 est une valeur propre de A et trouver les autres valeurs propres de A (on les notera r et s).

c) A est-elle diagonalisable sur IR ? sur **C** ?.

2) a) Montrer que pour tout $n > 0$, les valeurs propres de A^n sont 1, r^n et s^n.

b) Montrer l'existence (sans les calculer) de trois nombres complexes α, β et γ tels que,

$$\forall n > 0 \ , \ v_n = \alpha + \beta r^n + \gamma s^n$$

c) Montrer que $\forall x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n (v_n - \alpha) = 0$ et que la suite (v_n) converge vers α.

d) En déduire que α est nombre réel.

3) Pour tout entier naturel n, on pose, $w_n = v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2}$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_{n+1}=w_n$ et en déduire que $\alpha = \dfrac{a+2b+3c}{6}$.

EXERCICE 2 :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n. Pour tout x, y de E, le produit scalaire de x et y sera noté $(x|y)$ et la norme de x sera notée $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme f de E, on notera $f^2 = f \circ f$ et si $f \neq 0$, on pose

$$K(f) = \operatorname*{Sup}_{x \notin Ker(f^2)} \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\| \|f^2(x)\|}$$

On rappelle que si h est un endomorphisme de E, Ker(h) désigne le noyau de h et la norme de h est donnée par :

$$N(h) = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|h(x)\|.$$

1) Calculer K(f) dans les deux cas suivants :

a) f est un endomorphisme de E vérifiant $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$

b) f est un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, représenté dans une base orthonormée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que si f est un endomorphisme bijectif de E, alors $K(f) = K(f^{-1})$.

3) Montrer que si f est un endomorphisme autoadjoint de E, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
Calculer K(f) dans le cas où $f^2 \neq 0$.

4) Montrer que si f est un endomorphisme de E alors :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \textbf{ Si et Seulement Si } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

On note g l'endomorphisme de Im(f) induit par f et on suppose que $f^2 \neq 0$.
i) Montrer que g est bijectif.
ii) Montrer que K(f) est fini si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et que dans ce cas,

$$K(f) \leq N(f)N(g^{-1}).$$

iii) Montrer que $K(f) \geq 1$.

5) Soit f un endomorphisme de E et f* son adjoint.
a) Montrer que f* o f est un endomorphisme autoadjoint de E positif.
b) Soit λ la plus grande valeur propre de f* o f. Montrer que $N(f) = \sqrt{\lambda}$.

PARTIE II

EXERCICE 3 :
Dans cet exercice, on pourra utiliser la formule suivante, sans la justifier:

(*) $$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$$ *où* $(a_{n,p})_{n,p}$ *est une famille de nombres réels positifs.*

Pour tout réel t, on pose

$$f(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

1) Montrer que $\forall t \in]0,+\infty[$, f(t) est bien définie.

2) Donner le développement en série entière de la fonction $x \rightarrow -\ln(1-x)$ et préciser le rayon de convergence.

3) Montrer que $\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(e^{nt}-1)}$. *(Indication : on utilisera 2) et la formule (*)).*

4) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{n(e^{nt}-1)}$ est normalement convergente sur $]0,+\infty[$.

5) Déduire, en utilisant 3) et 4), un équivalent simple de f(t) quand t tend vers 0.

EXERCICE 4 :

Ω étant le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$, de centre O et de rayon 1. u une application de Ω vers $\mathbb{R}$ de classe C^2, vérifiant : $\forall(x,y)\in\Omega,\ \Delta u(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0.$

On considère l'application F définie sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ par $F(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1) a) Vérifier que F est de classe C^2 sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ et calculer $\frac{\partial F}{\partial r},\frac{\partial^2 F}{\partial r^2},\frac{\partial F}{\partial\theta},\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de u par rapport à x et y.

b) En déduire que $\forall(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$, $r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=0$.

2) Pour tout entier relatif n et tout réel r de $]0,1[$, on pose :

$$c_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(r,\theta)e^{-in\theta}\,d\theta$$

a) Vérifier que c_n est de classe C^2 et montrer que pour tout r de $]0,1[$,

$$c_n'(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta\ ,\ c_n''(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta\ .$$

b) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{Z},\forall r\in]0,1[\ ,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta=-n^2c_n(r)$$

3) On considère l'équation différentielle (E_n) : $x^2y''+xy'-n^2y=0$.
On désigne par S_n l'ensemble des solutions de (E_n) et par T_n l'ensemble des solutions bornées de (E_n).
   a) Montrer que c_n est dans T_n.
   b) Montrer que S_n est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
   c) Déterminer les solutions de (E_n) qui sont de la forme x^a où a est à déterminer.
   d) Déduire les solutions de (E_n), puis donner c_n.

4) Donner l'expression de F pour $(r,\theta)\in]0,1[\times\mathbb{R}$