المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية

INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT

(29-06-2000)

Epreuve de Mathématiques

(Durée: 3H00)

Avertissement:

- *L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.*
- ***L'utilisation de calculatrices est strictement interdite.***

AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

EXERCICE 1 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A est diagonalisable et déterminer une base $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ permettant la diagonalisation de A de sorte que les coordonnées des e_i soient parmi 0 , 1 et –1 .

2) a) A est elle inversible ?

b) Calculer A^2.

c) Etudier la diagonalisation de A^2 à partir de celle de A et retrouver le résultat précédent

d) En déduire l'expression générale de A^n pour n entier .

3) a) On désigne par E_1 , E_2 les sous-espaces propres de A .
Déterminer les matrices P_1 et P_2 des projecteurs de $\mathbb{R}^4$ (respectivement) sur E_1 parallèlement à E_2 et sur E_2 parallèlement à E_1 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer , pour i,j dans $\{1,2\}$, P_iP_j et $\sum_{i=1}^{2} P_i$.

c) Ecrire les matrices de ces projecteurs dans la base B.

d) En déduire que $A = \sum_i \lambda_i P_i$ où λ_i est la valeur propre correspondant au sous-espace propre E_i.

e) Retrouver ainsi l'expression de A^n.

EXERCICE 2

L'espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3 est rapporté à une base orthonormée directe (i , j , k). Un vecteur w de composantes (a , b , c) étant donné, on considère l'application qui, à tout vecteur v de E , associe le vecteur $T(v) = v \wedge w$.

I) a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Ecrire la matrice M de T par rapport à la base (i, j , k).

c) Montrer que l'opérateur adjoint T* de T vérifie $T^* = -T$.

d) Calculer T^2 et exprimer T^3 en fonction de T.

e) Déterminer le noyau de T et l'image de T,.

II) Application: on prend $a = \frac{-1}{3}, b = c = \frac{2}{3}$.

a) Montrer que les vecteurs $U = \frac{1}{3}(2i - j + 2k), V = \frac{1}{3}(2i + 2j - k)$ forment une base orthonormée de ImT.

b) Montrer que (U, V, w) est une base orthonormée directe de E

c) Calculer la matrice de T par rapport à la base (U ,V , w)

d) Montrer que 0 est l'unique valeur propre réelle de T .

III) Soit d un réel non nul

a) Montrer que T + dI est inversible

b) On considère l'endomorphisme R_d de E tel que $R_d = (T + dI)^{-1}(-T + dI)$ où I est l'endomorphisme unité de E .
Montrer que la matrice N_d de R_d par rapport à la base (i , j, k) est orthogonale .

c) Prouver que, pour w fixé, toutes les matrices N_d admettent un vecteur propre en commun.

EXERCICE 3

Soient f et g les fonctions d'une variable réelle x définies par

$$f(x)=\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt\ ,\quad g(x)=\int_0^1 \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}\,dt$$

1) a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.

b) Donner le sens de variation de f .

c) Quelles sont les limites de f aux bornes de D ?

d) Déterminer un équivalent de f(x) quand x tend vers 1 dans D

(On pourra introduire la différence $\sqrt{1+t}-1$ *).*

e) On suppose x <0. En utilisant une intégration par parties, établir une relation entre f(x) et f(x + 1).

f) Calculer f(0) , f(-1) ,f(-1/2) et f(1/2).

2) Déterminer le domaine de définition de la fonction g .

3) On fixe $x\in]-1,1[$.

a) Soit n un entier naturel .On pose $I_n=\int_0^1(-\ln t)^n\,dt$. Montrer que $I_n=n\,!$.

b) Soit $\alpha\in]0,1]$. Montrer que

$$\int_\alpha^1\frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}\,dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_\alpha^1\frac{(-\ln t)^k\,t}{\sqrt{1+t}}\,dt\right)\frac{x^k}{k!}$$ (Justifier en particulier l'existence de cette somme).

c) On pose pour $\alpha\in]0,1]$: $g_n(\alpha)=\left(\int_\alpha^1\frac{(-\ln t)^n\,t}{\sqrt{1+t}}\,dt\right)\frac{x^n}{n!}$

Montrer que la série $\sum g_n$ converge uniformément sur]0, 1] .

d) En déduire une expression de g(x) comme somme d'une série entière de la forme $\sum a_n x^n$.

4) a) Pour $x\in D$, exprimer f(x) en fonction de g(x).

b) Trouver un équivalent de f(x) quand x tend vers $-\infty$.

c) Montrer que f admet un développement en série entière dont on précisera le rayon de convergence.

EXERCICE 4

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, de classe C^1, et vérifiant

$$\lim_{x\to-\infty}x^2f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2f'(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2f'(x)=0$$

1) Prouver que la fonction $f_0 : x\to e^{-x^2}$ vérifie les hypothèses ci-dessus .

2) On pose pour tout réel y : $\varphi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixy}\,dx$.

a) Donner le domaine de définition de φ (c'est à dire l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles l'intégrale considérées converge).

b) Que peut-on dire de φ lorsque f est paire ? impaire ?

3) On pose $g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}f(x-2k\pi)+\sum_{k=1}^{+\infty}f(x+2k\pi)$.

a) Montrer que g est 2π- périodique et de classe C^1 sur $[0,2\pi]$.

b) Exprimer à l'aide de φ les coefficients de Fourier de g .