Mathématiques II

Épreuve 2012

Question 1 : soient p et q deux entiers naturels, et soit a et b deux nombres réels tels que a<b.

On pose $I_{p,q} = \int_b^a (t-a)^p (b-t)^q \, dt$

Après avoir établi une récurrence entre et, réduire l'expression de $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$, déduire l'expression de $I_{p,q}$.

$A)$ $\frac{p!q!}{(p+q-1)!}(a-b)^{p+q}$ B) $\frac{p!q!}{(p+q)!}(a-b)^{p+q+1}$ C) $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}$

D) $\frac{(p+q)!}{(pq)!}(b-a)^{p+q-1}$ E) Autre réponse

Question 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires vérifiant :

$\forall (i,j) \in IN^2$, $P\,[(X=i) \cap (Y=j)] = \frac{1}{j!}\frac{a}{2^{i+j}}$

Pour que la formule précédente définisse une loi de probabilité conjointe du couple (X, Y), la constante a est :

A) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ C) $\frac{1}{2e}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Question 3 : Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4.

Soient A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice AM- MB .

$\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E .

Dans le cas particulier ou A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) est alors égale à :

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 4 : Pour n entier naturel non nul, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini est :

A) n ! B) $\log(n!)$ C) $n \log 2$ D) $\log n$ E) Autre réponse

Note : $\log x$ désigne le logarithme népérien de x ($x \in IR^*{}_+$) .

Question 5 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note : $I_1, I_2, \dots, I_N$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1]. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$, sont indépendants.

Soit un réel t appartenant à [0 ; 1]. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t))$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

Soit S_t la variable définie par : $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n, et$ A la variable aléatoire égale a l'instant d'arrivée du premier invité.

Après avoir comparé les évènements : (A>t) et (St=0), déterminer la densité f de la variable aléatoire A.

A) $f(t) \begin{cases} t^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ B) $f(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

C) $f(t) = \begin{cases} 1-t^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ D) $f(t) = \begin{cases} nt^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

E) Autre réponse

Question 6 : Soir f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

f(x, y, z) = (x + 2y + 5z , 2x-y , -x +2y –z)

Soit u= (0, 1 , 1 , α) un vecteur de $\mathbb{R}^4$, où α est un nombre réel. Pour quelle valeur de α le vecteur u appartient au sous espace vectoriel Im(f).

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $-\frac{2}{5}$ D) $-\frac{4}{5}$ E) Autre réponse

Question 7 : Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les cotés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

■ Le pion est sur le sommet 1 au départ.

■ Lorsque le pion est à l'instant donné sur un sommet du carré, il se déplace l'instant

suivant vers un sommet voisin (relié par un coté) avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité de $\frac{1}{2}$.

On noté Xn la variable aléatoire égale au numéro de sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n . On a donc X0 = 1 .

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 dont le terme situé a l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle p (Xn+1 = i / Xn = j) .

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K sous la forme :

A) $A = \frac{1}{3}J + \frac{2}{3}K$ B) A=$\frac{1}{2}J + \frac{1}{4}K$ C) $A = \frac{2}{3}J + \frac{1}{3}K$ D) A=$\frac{1}{4}J + \frac{1}{2}K$

E) Autre réponse

Question 8 : Pour n entier naturel non nul, on pose Sn=$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, alors un équivalent de Sn quand n tend vers l'infini est :

A) $\sqrt{n}$ B) $\sqrt{2n}$ C) $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ D) $2(\sqrt{2}+1)\sqrt{n}$ E) Autre réponse

Question 9 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;\ 1]$

L'espérance de la variable aléatoire Y définie par Y=$\frac{X}{2-X}$ est :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\ln 2}{2}$ C) $2\ln 2-1$ D) $4\ln 2+1$ E) Autre réponse

Question 10 : Une urne contient 10 boules rouges et 2 boules jaunes. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule rouge.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires.

La variance de la variable X est alors égale à :

Question 11 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$f_n : R_+^* \to R$

$$x \to f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln x}{x^2-1} & si\ x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & si\ x = 1 \end{cases}$$

N.B : ln désigne le logarithme népérien.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable en 1 ; de plus, la dérivée de f_n en 1 égale à :

A) $-\frac{1}{2}+7n$ B) $-\frac{1}{2}+3n$ C) $\frac{n+1}{2}$ D) $\frac{n-1}{2}$ E) Autre réponse

Question 12 : Soit f la fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est positive et qu'elle vérifie la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; On désigne par F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit $X_1, X_2, \ldots, X_N$ N variables aléatoires réelles indépendantes ayant toutes la même fonction de répartition F. On définit la variable aléatoire réelle Y_N par Y_N = Max($X_1, X_2, \ldots, X_N$) alors YN admet une densité de probabilité g définie par :

A) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{2N-2}$
B) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{N-1}$
C) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = NF(x)[f(x)]^{N-1}$
D) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = [f(x)]^{N}$
E) Autre réponse

Question 13 : Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

En utilisant la définition de la variance de U, calculer $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ D) $\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$ E) Autre réponse

Question 14 : On considère la suite (Sn) définie par :

$\forall n \in IN^*$: $\quad Sn = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$

La suite (S_n) converge vers :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}\ln 2$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}\ln 2$ E) Autre réponse

Question 15: α désigne un paramètre réel.

On considère la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & +1 \end{pmatrix}$

Et on note φ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Quel que soit α, l'endomorphisme φ_α admet les valeurs propres :

A) $(\alpha-1)\ et\ (\alpha+1)$ B) 1 et $(\alpha-1)$ C) -1 et $(\alpha-1)$ D) 1 et $(\alpha+1)$

E) Autre réponse

Question 16 : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^3+3x^2+2} - \sqrt[3]{x^3+1})^x;$$

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

A) $+\infty$ B) $\frac{1}{3}$ C) e D) $\frac{1}{e}$ E) Autre réponse

Note : e désigne la base du logarithme népérien.

Question 17 : On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir déterminé une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne (-1, 1, 1) telle que $A = PDP^{-1}$, calculer la matrice $c = P^{-1}BP$

A) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ C) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

D) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 18 : On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + \lambda y = \alpha \\ \lambda x + y = \beta \\ x + \lambda y + z + \lambda t = y \\ x - \lambda + \lambda z + t = \delta \end{cases}$$

où $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^5$

La condition nécessaire pour que le système admette une infinité de solution est :

A) $\lambda \in \{0, 2\}$ B) $\lambda \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ C) $\lambda \in \{-1, 1\}$ D) $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

E) Autre réponse

Question 19 : Au cours d'un scrutin, des enquêteurs organisent un sondage à la sortie des bureaux de vote. On considère que le scrutin débute à l'instant 0 et s'achève à l'instant 1. La liste électorale comprend n noms, numérotés de 1 à n. Il ne peut pas y avoir d'abstentions. On modélise l'instant d'arrivée de l'électeur i , $1 \leq i \leq n$, par une variable aléatoire X_i de loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Les variables X_i sont supposées mutuellement indépendantes. On note :

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ les n variables aléatoires ayant pour valeurs les valeurs variables

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ordonnées dans l'ordre croissant . Par exemple, pour n=4, si on obtient

$X_1 = 0{,}3$; $X_2 = 0{,}1$; $X_3 = 0{,}7$; $X_4 = 0{,}2$, on aura :

$Y_1 = 0{,}1$; $Y_2 = 0{,}2$; $Y_3 = 0{,}3$; $Y_4 = 0{,}7$.

Soit $Y_n = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ l'instant d'arrivée du dernier volant. La variance de Y_n est alors égale à :

A) $\frac{n}{(2n+1)(n+3)}$ B) $\frac{2n}{(n+1)(n+4)}$ C) $\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$ D) $\frac{2n}{(n+3)^2(n+1)}$

E) Autre réponse

Question 20 : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$;

Alors $\lim_{x \to 0+} f(x)$

A) $-\infty$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $+\frac{1}{2}$ E) Autre réponse