

TD :LA DERIVATION

Exercice1 : On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x - 3$. Justifier que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3 + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = -3 = f'(-2) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -3$

Exercice2 : Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

$$\begin{aligned} \text{Solution : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 + 1 + h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + 1 + h - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 4 = 4 = f'(1) \end{aligned}$$

Exercice3 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

Que peut-on conclure ?

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 3 = 3 = f'_d(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice4 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérивabilité de f en $x_0 = 1$

Solution : on a $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

Exercice5 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - |x|$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1 = f'_d(0)$$

donc f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice6 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

1- Montrer que f est dérivable en $a = -2$.

2- f est-elle dérivable en 0.

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$$

1- Ecrire une expression de f sur \mathbb{R} sans valeur absolue.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1.

3- f est-elle dérivable en -1.

Exercice8 Déterminer une fonction affine

tangente en -3 de la fonction $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Exercice9 : donner une approximation de $\sin 3$

Solution : Si on veut une approximation de $\sin 3$, on peut prendre : $f(x) = \sin x$ et $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h = 3 - \pi$ (pour avoir $3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = \sin \pi = 0$ et $f'(a) = \cos \pi = -1$

(à prouver) ce qui donne :

$$\sin 3 = \sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3.$$

Exercice10 : soit f une fonction définie sur

$$]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}} \dots si x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) étudier la dérivabilité de f en 0

2) Donner une valeur approchée

du nombre : $f(10^{-5})$

$$\begin{aligned} \text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

2) on a $f(a + h) \sim f'(a)h + f(a)$

Donc $f(0 + 10^{-5}) \sim f(0) + 10^{-5}f'(0)$ $a = 0$ et $h = 10^{-5}$

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$

Donc $f(10^{-5}) \sim 2 \times 10^{-5}$

Exercice11 : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = \sin x$ en $A(0, f(0))$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$$

Donc f est dérivable en 0

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

L'équation de la tangente à la courbe en $A(0, f(0))$ est : $(T) : y = x$

Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \dots x > 1 \end{cases}$$

1) déterminer le domaine de définition de f

2) étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$

ou $x^3 - x \geq 0$ et $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ ou $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[$ donc : $D_f = [0; +\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

On a : $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{x(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en

$A(0, 1)$. de coefficient directeur $1 = f'_d(0)$

3) a) étudie de la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ On a : $f(1) = 0$ soit $0 \leq x \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} -(1+x)^2 = -4$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

b) soit $x > 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^3-x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x = 2$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en $A(1, 0)$ parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le haut

Exercice13 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

1) étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

2) étudier la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

4) donner l'équation de la demie tangente à droite à la courbe de f en en $x_0 = 1$

4) donner l'équation de la demie tangente à gauche à la courbe de f en en $x_0 = 1$

Solution :1) $f(x) = |x^2 - 1|$

étude du signe de : $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Donc : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases}$ et

$$f(1) = |1^2 - 1| = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0

1) étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à droite en $A(1, 0)$. de coefficient directeur $f'_d(1) = 2$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2-1)-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$ et $f'_g(1) = -2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à gauche en $A(1, 0)$. de coefficient directeur $f'_g(1) = -2$

3) f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en $A(1, 0)$.

4) l'équation de la demie tangente à droite à la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

5) l'équation de la demie tangente à gauche à la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(1) + f'_g(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x-1) \Leftrightarrow (\Delta_g) : y = -2x + 2$$

Exercice13 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + x.$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}

Solution :

Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + x + h - 2x^2 - x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h - 2x^2 - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 = f'(x)$$

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de \mathbb{R} , la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$

S'appelle la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} et se note par f' .

Exercice14 :1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction \sin sur \mathbb{R} .

2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \text{ et sur } \mathbb{R}^{*-}$$

Exercice15 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x)=11$

$$2) f(x)=7x+15 \quad 3) f(x)=x^3 \quad 4) f(x)=\sin(5x-1)$$

Solution : 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

$$3) f'(x)=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$$

$$4) f'(x)=(\sin(5x-1))'=(5x-1)'\cos(5x-1)=5\cos(5x-1)$$

Exercice16 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

Solution :

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=(x^2)'+(7x+15)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(\sqrt{x})'$$

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=2x+7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice17 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=(5x^2+1)(3x-1)$

Solution : On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x)=(5x^2+1)'(3x-1)+(5x^2+1)(3x-1)'$$

$$f'(x)=10x(3x-1)+3(5x^2+1)=30x^2-10x+15x^2+3$$

$$f'(x)=45x^2-10x+3$$

Exercice18 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=(3x+4)^3$

Solution : On utilise la formule : $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x)=(3x+4)'=3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)'=3 \times 3x(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

Exercice19 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

Exercice20 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1 \times (3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

Exercice21 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$

Solution : On utilise la formule : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

Exercice22 : Soit $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Solution : $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Exercice23 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$1) f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1 \quad 2) f(x)=\frac{3}{x}$$

$$3) f(x)=4\sqrt{x}-1 \quad 4) f(x)=\cos 2x+3 \sin 3x$$

$$5) f(x)=(3x^2+2)(7x+1) \quad 6) f(x)=\frac{1}{5x+7} \quad 7) f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$$

Solutions :

$$1) f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4 \times 4x^{4-1}-\frac{1}{3} \times 3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$$

$$2) f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3 \times \frac{1}{x}\right)'=3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$$

$$3) f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$4) f'(x)=(\cos 2x+3 \sin 3x)'=-2 \sin 2x+3 \times 3 \cos 3x=-2 \sin 2x+9 \cos 3x$$

$$5) f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$$

On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x)=(3x^2+2)'(7x+1)+(3x^2+2)(7x+1)'$$

$$f'(x)=6x(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$$

$$7) f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3+1} \right)' = \frac{(7x)'(x^3+1) - 7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{7(x^3+1) - 7x \times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3+1)^2}$$

Exercice24 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

$$1. f(x) = -2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$2. f(x) = (3x^2 + 1)(2x + 3)$$

$$3. f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1} \quad 4. f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1}$$

$$5. f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^2 + 1} \quad 6. f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 3x + 1}$$

Exercice25 : déterminer $f'(x)$ dans les cas suivants : 1) $f(x) = 9x + 2$ 2) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

$$3) f(x) = x + \frac{2}{x} \quad 4) f(x) = \frac{5x + 2}{3x - 1}$$

$$5) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad 6) f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^5}$$

$$7) f(x) = (5x^3 - 3)^4 \quad 8) f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$$

$$9) f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \quad 10) f(x) = x + \frac{x^2}{x - 1}$$

$$11) f(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 3}} \quad 12) f(x) = x \cos x$$

$$13) f(x) = \tan^2 x \quad 14) f(x) = \cos x \times \sin x$$

$$15) f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \quad 16) f(x) = \frac{(1 + 2x + x^2)^5}{4}$$

$$17) f(x) = 1 + x + \frac{x - 1}{\sqrt{2 + x^2}} \quad 18) f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$$

Exercice 26: Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

$$1) f(x) = x^2 + 3x - 1 \quad 2) f(x) = 4 \sin x$$

$$3) f(x) = x^4 \cos x \quad 4) f(x) = \sqrt{x} + x^3$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 6) f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$$

$$7) f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \quad 8) f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$9) f(x) = (2x + 3)^5$$

Solution : 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1 \quad D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2)' + (3x - 1)' = 2x + 3$$

$$2) f(x) = 4 \sin x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 4u(x) \text{ avec } u(x) = \sin x$$

Puisque u est dérivable sur \mathbb{R} alors f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(u(x))' = 4 \cos x$$

$$3) f(x) = x^4 \cos x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = x^4 \text{ et } v(x) = \cos x$$

Puisque u et v sont dérivables sur \mathbb{R} alors f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}

On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((x^4) \times (\cos x))' = (x^4)' \times (\cos x) + (x^4) \times (\cos x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \times (\cos x) - x^4 \times \sin x = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} + x^3 \quad D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ avec } u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = x^3$$

Puisque u est dérivables sur \mathbb{R}_+^* et v est dérivables en particulier sur \mathbb{R}_+^* alors f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+^*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = (u(x))' + (v(x))' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 3x^2$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad D_f = \mathbb{R}^{**} =]0; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{1}{u(x)} \text{ avec } u(x) = \sqrt{x}$$

Puisque u est dérivables sur \mathbb{R}_+^*

Donc f est dérivables sur \mathbb{R}_+^*

$$\text{On utilise la formule : } \left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$6) f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{4} \right\}$$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{4} \right\}$

$$\text{est on a : } f(x) = \frac{6}{u(x)} \text{ avec } u(x) = 4x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 6 \left(\frac{1}{u(x)} \right)' = 6 \left(-\frac{u'}{u^2} \right) = -6 \frac{(4x^2 + 3x - 1)'}{(4x^2 + 3x - 1)^2} - 6 \frac{8x + 3}{(4x^2 + 3x - 1)^2}$$

$$7) f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$f(x) = u(x)/v(x)$ avec $u(x) = 4x - 3$ et $v(x) = 2x - 1$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{2x - 1} \right)' = \frac{(4x - 3)'(2x - 1) - (4x - 3)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{(2x - 1)^2}$$

$$8) f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad : D_f =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

On a : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 4$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{-2; 2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f - \{-2; 2\}$

$$\forall x \in D_f - \{-2; 2\} : f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 4} \right)' = \frac{(x^2 - 4)'}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$9) f(x) = (2x + 3)^5 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (u(x))^5 \quad \text{avec } u(x) = 2x + 3$$

On utilise la formule : $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = \left((2x + 3)^5 \right)' = 5 \times (2x + 3)^{5-1} \times (2x + 3)' = 5 \times 2 \times (2x + 3)^4$$

$$f'(x) = 10(2x + 3)^4$$

Exercice 27 : soit f une fonction définie sur

$$I =]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } -\pi < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

1) montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ et donner l'équation de la tangente à la courbe de f en $x_0 = 0$

2)a) étudier la dérivalibilité de f en $x_0 = -1$

b) donner les équations des demies tangentes à la courbe de f en $x_0 = -1$

Solution : 1) étude de la dérivalibilité de f à droite en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$ et

$$f'_g(0) = -1$$

Et puisque : $f'_d(0) = f'_g(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0 = 0$ et $f'(0) = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en $O(0, 0)$. de coefficient directeur $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$ est : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow (T) : y = -x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2} = f'_d(-1)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = -1$ et $f'_d(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x - 1} = -\frac{1}{2} = f'_g(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et

$$f'_g(-1) = -\frac{1}{2} \quad \text{mais on a : } f'_d(-1) \neq f'_g(-1)$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en $A(-1, 0)$.

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_d(-1)(x + 1) \quad \text{avec } x \geq -1$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_d) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{avec } x \geq -1$$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_g(-1)(x + 1) \quad \text{avec } x \leq -1$$

$$y=0-\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow (T_g): y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad \text{avec } x \leq -1$$

Exercice28 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{3x-2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$$

1) déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x-2 \geq 0$ et $x-1 \neq 0$

$$\text{Donc : } D_f = \left[\frac{2}{3}; 1 \right] \cup]1; +\infty[$$

2) on a $f(x)=g(3x-2) \times h(x)$

$$\text{Avec : } h(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x}$$

On sait que : g est dérivable sur \mathbb{R}_* et la fonction polynôme D_f $x \rightarrow 3x-2$ est dérivable sur D_f

$$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \text{ donc la fonction } x \rightarrow g(3x-2)$$

est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ cad $D_{f'} = D_f - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall x \in D_{f'} :$

$$f'(x)=(g(3x-2))' \times h(x) + g(3x-2) \times (h(x))'$$

$$(g(3x-2))'=(3x-2)' \times g'(3x-2)=3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

$$\text{Car : } g'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(h(x))' = 3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3 + \sqrt{3x-2} \frac{-9}{(x-1)^2} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

Exercice29 : en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Solution: 1) on pose : $f(x)=(x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur \mathbb{R} en particulier en -1 et

$$f(-1)=(-1+2)^{2018}=1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$$

Et puisque : $f'(x)=2018(x+2)^{2017}(x+2)'=2018(x+2)^{2017}$

$$\text{Donc : } f'(-1)=2018 \times 1^{2017}=2018$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1} = 2018$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} \text{ on pose } f(x)=2 \sin x$$

on a : f est dérivable sur \mathbb{R} en particulier en $\frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2 \sin \frac{\pi}{6}=1$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Et puisque : $f'(x)=2 \cos x$

$$\text{Donc : } f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2 \cos \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien

