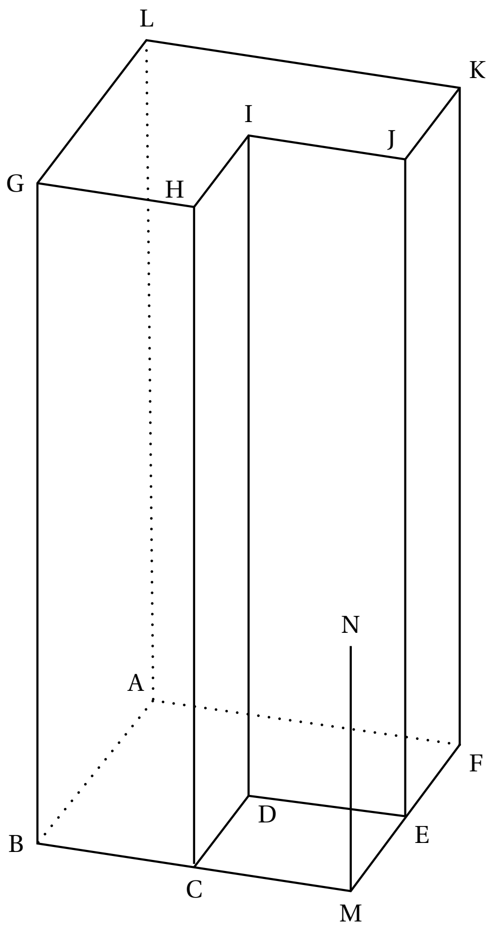
Baccalauréat L spécialité Métropole–La Réunion
23 juin 2010

L'usage d'une calculatrice est autorisé — 3 heures

Deux annexes sont à rendre avec la copie

EXERCICE 1 — **5 points**

Un immeuble a la forme du solide ABCDEFGHIJKL dont une représentation en perspective parallèle est donnée ci-dessous.



Une esplanade, qui a la forme du carré CDEM, jouxte cet immeuble.

À un coin de cette esplanade se trouve un mât vertical représenté par [MN].

ABMF est un carré de centre D.

Les points E et C sont les milieux respectifs des segments [MF] et [MB].

Trois dessins sont donnés en annexe. Ils sont à compléter et à rendre avec la copie, en laissant apparents les traits de construction.

1. On place un projecteur, qui est donc une source de lumière ponctuelle, au point H. Le dessin donné en **annexe 1** est une représentation de l'immeuble en perspective parallèle.
   - **a.** Sur ce dessin représenter l'ombre du mât sur le sol.
   - **b.** On note P le milieu du mât. Construire l'ombre p du point P.
2. À une certaine heure, les rayons du soleil sont parallèles à la droite (GC). Le dessin donné en **annexe 2** est encore une représentation de l'immeuble en perspective parallèle.
   - **a.** Sur ce dessin représenter l'ombre au soleil du mât sur le sol à cette heure.
   - **b.** L'ombre au soleil du milieu du mât est-elle le milieu de l'ombre du mât ? Justifier.

3. En **annexe 3** on a amorcé une représentation en perspective centrale de cet immeuble.

   On suppose que la face BCHG est située dans un plan frontal.

   Les points `b, g, k, f` et `m` sont les images des points B, G, K, F et M dans cette perspective. La droite (δ) est la ligne d'horizon.

   a. Construire les images `c, d` et `e` des points C, D et E (l'ordre de construction n'est pas imposé).

   b. Compléter la représentation en perspective centrale de l'immeuble. *On ne représentera ni le mât ni les arêtes cachées.*

EXERCICE 2 — 6 points

Soit la suite U de terme général U_n définie par $\mathrm{U}_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n + 2(n+1).$$

1. Montrer que $\mathrm{U}_1 = 2$ et que $\mathrm{U}_2 = 6$. Calculer U_3.
2. Chacune des trois propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ?

   Justifier les réponses.

   Proposition 1 : « La suite U est arithmétique. »
   Proposition 2 : « Il existe au moins une valeur de n pour laquelle $\mathrm{U}_n = n^2 + 1$. »
   Proposition 3 : « Pour toutes les valeurs de n, on a $\mathrm{U}_n = n^2 + 1$. »
3. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	N un entier naturel non nul
Initialisation :	P = 0
Traitement :	Pour K allant de 0 à N :
	Affecter à P la valeur P + K
	Afficher P
Fin de l'algorithme	

   a. Faire fonctionner cet algorithme avec N = 3.

   Obtient-on à l'affichage les valeurs des quatre premiers termes de la suite U ?

   b. Modifier cet algorithme de manière à obtenir à l'affichage les valeurs des N premiers termes de la suite U.
4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k, $\left(k^2 + k\right) + 2(k+1) = (k+1)^2 + k + 1$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n = n^2 + n$.

EXERCICE 3 — 4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 15]$ par

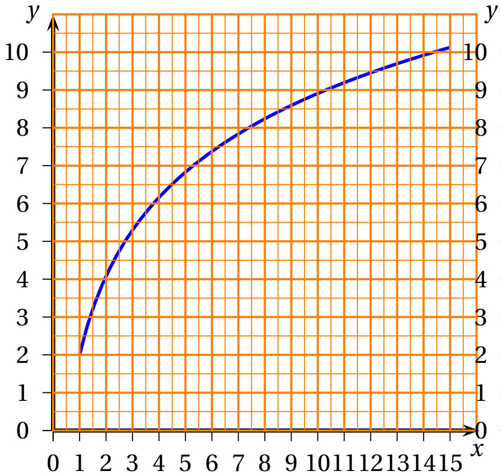
$$f(x) = 2 + 3\ln x.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de f.

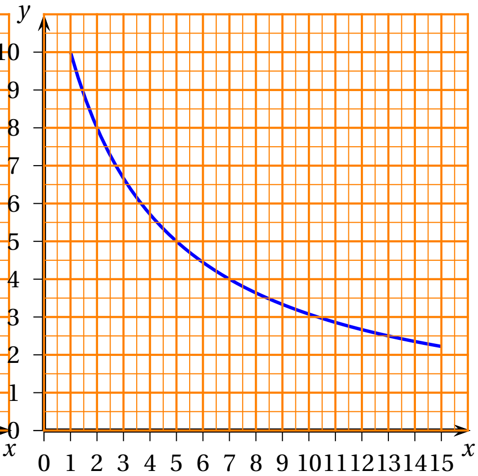
1. Calculer $f'(x)$, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 15]$.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 1.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 8$.

4. Parmi les trois représentations graphiques données ci-dessous, une seule représente la fonction f.
Préciser quelle est cette représentation et justifier l'élimination de chacune des deux autres.

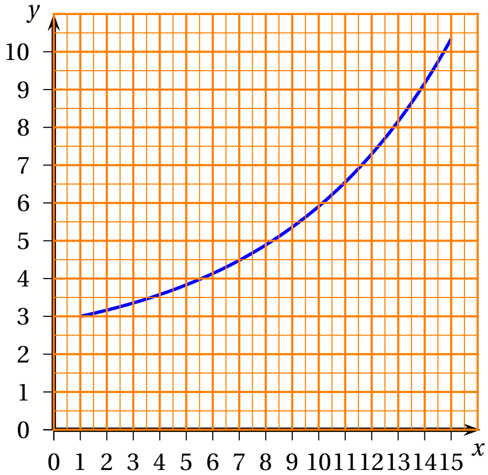
n° 1



n° 2



n° 3



EXERCICE 4 **5 points**

1. Justifier que $10^3 \equiv -1 (\text{modulo } 13)$.

2. **a.** En déduire le reste de la division euclidienne de 10^6 par 13.

b. Montrer que $10^9 \equiv -1 (\text{modulo } 13)$ et que $10^{12} \equiv 1 (\text{modulo } 13)$.

3. Soit l'entier N = 5 292 729 824 628.

a. En remarquant qu'une autre écriture de N est :

$$N = 5 \times 10^{12} + 292 \times 10^9 + 729 \times 10^6 + 824 \times 10^3 + 628$$

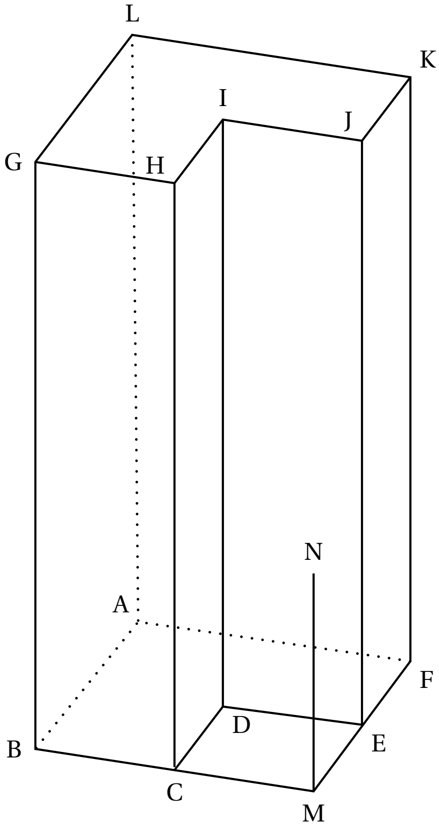
démontrer que N est congru à 246 modulo 13.

b. N est-il divisible par 13 ?

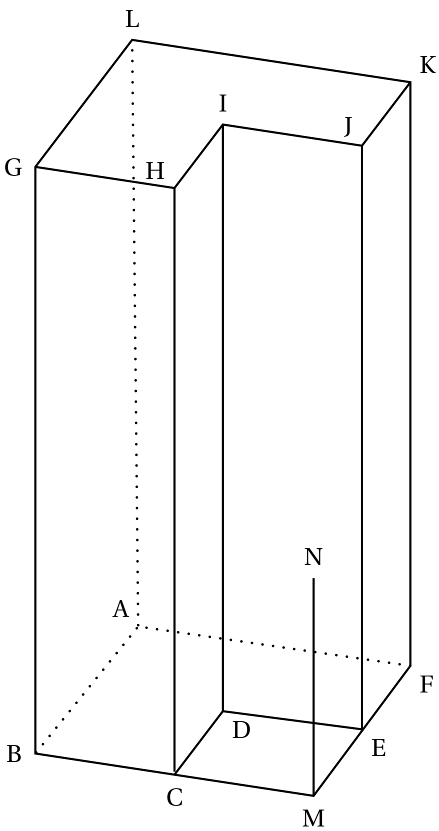
c. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que le nombre $10^{2010} + 12$ est divisible par 13.

ANNEXES (à compléter et à rendre avec la copie)

Annexe 1 – Exercice 1



Annexe 2 – Exercice 1



Annexe 3 – Exercice 1