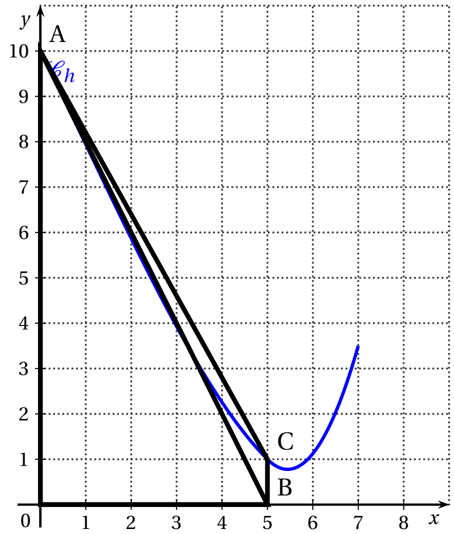
Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES/L Liban 31 mai 2016

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. • $f'(0) = 0$ est vraie : la tangente est horizontale.
2. g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivable et sur cet intervalle :

   $g'(x) = 1\ln(x) + (x+1) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\ln(x) + x + 1}{x} = \ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x}$: réponse **a.**
3. 

   La fonction étant positive sur $[0\,;5]$, l'intégrale est, en unité d'aire l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_h$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 5$.

   On compte sous la courbe 21 carreaux et 37 carreaux qui contiennent entièrement la courbe.

   On peut affiner en encadrant l'aire cherchée par l'aire du triangle OAB égale à $\dfrac{5 \times 10}{2} = 25$ et l'aire du trapèze OACB qui est égale à $\dfrac{10+1}{2} \times 5 = 27,5$. La bonne réponse est **b.**
4. Le signe de la dérivée seconde donne la concavité ou la convexité : sur $]0\,;2[$, $k'' < 0$ et sur $]2\ ;+\infty[$, $k''(x) > 0$. k est donc concave puis convexe : réponse **a.**

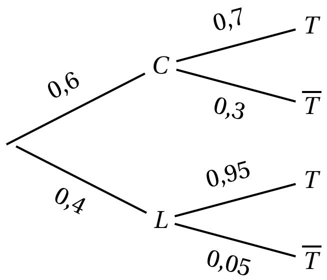
Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. D'après l'énoncé $p(C) = 0,60$, $p(L) = 0,40$, $p(T) = 0,80$ et $p_C(T) = 0,70$.
2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.



3. On a $p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.
4. Il faut trouver $p_T(C) = \dfrac{p(T \cap C)}{p(T)} = \dfrac{0,42}{0,80} = \dfrac{42}{80}\dfrac{21}{40} = 0,525$.
5. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
   $p(T) = p(C \cap T) + p(L \cap T)$ soit $p(L \cap T) = p(T) - p(C \cap T) = 0,80 - 0,42 = 0,38$.
   On en déduit que $p_L(T) = \dfrac{p(L \cap T)}{p(L)} = \dfrac{0,38}{0,40} = 0,95$.
   95 % des lycéens ont un téléphone portable.

   b. Voir ci-dessus.

Partie B

1. La calculatrice donne : $p(2\,000 \leqslant X \leqslant 3\,000) \approx 0,558$.
2. $p(X \geqslant 4\,000) = p(W \geqslant 2\,500) - p(2\,500 \leqslant X \leqslant 4\,000) \approx 0,5 - 0,489 \approx 0,011$ soit un peu plus de 1 %.
3. La calculatrice livre $p(X \leqslant a) = 0,8 \implies a \approx 3\,047$, ce qui se traduit par :
   80 % des élèves envoient moins de 3 047 SMS par mois.

Exercice 3 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

1. **a.** $u_0 = 75$, donc en 2016 $u_1 = u_0 \times 1,12 - 6 = 75 \times 1,12 - 684 - 6 = 78$.

   b. D'une année sur l'autre l'augmentation est de 12 %, donc le nombre de contrats est multiplié par $1 + \dfrac{12}{100} = 1 + 0,12 = 1,12$ et ce nombre est diminué paar les 6 résiliations, donc

$$u_{n+1} = 1,12u_n - 6.$$

2. **a.** Afficher n ou afficher $2015 + n$ année où le nombre de contrats dépassera 100.

   b.

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	75	78	81	85	89	94	99	105

   c. En 2022 le nombre de contrats sera de 105 : il faudra donc embaucher du personnel.

3. **a.** On a pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 1,12u_n - 6 - 50 = 1,12u_n - 56 = 1,12\left(u_n - \dfrac{56}{1,12}\right) = 1,12\,(u_n - 50) = 1,12v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = 1,12v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12, de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.
   On sait qu'alors pour tout entier naturel n : $v_n = 25 \times 1,12^n$.
   Or $v_n = u_n - 50 \iff u_n = v_n + 50$, donc finalement pour tout naturel n :

$$u_n = 50 + 25 \times 1,12^n.$$

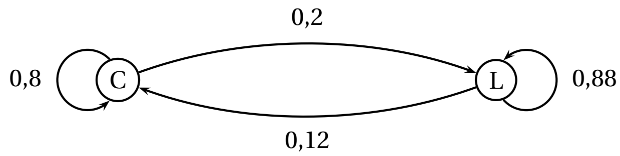
c. Il faut ré"soudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $u_n > 100$:
$u_n > 100 \iff 50 + 25 \times 1,12^n > 100 \iff 25 \times 1,12^n > 50 \iff 1,12^n > 2 \iff$
$n \ln 1,12 > \ln 2 \iff n > \dfrac{\ln 2}{\ln 1,12}$. Or $\dfrac{\ln 2}{\ln 1,12} \approx 6,1$. Il faut prendre au moins $n = 7$.

d. On retrouve bien le fait qu'en 2022 (soit pour $n = 7$), le nombre de contrats dépassant 100, il faudra embaucher du personnel.

Exercice 3 **5 points**
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. L'énoncé montre que $P_{L_n}(C_{n+1}) = 0,12$ et donc $P_{L_n}(L_{n+1}) = 1 - 0,12 = 0,88$, puis que $P_{C_n}(L_{n+1}) = 0,20$ et donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1 - 0,20 = 0,80$.
D'où le graphe probabiliste :



2. **a.** La matrice de transition M de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$. Les termes de cette matrice ne sont pas nuls, donc l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} c & l \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation :
$P = P \times M$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 0,8c + 0,12l \\ l & = & 0,2c + 0,88l \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,2c & = & 0,12l \\ 0,12l & = & 0,2c \end{array}\right.$ Mais on a de plus $c + l = 1$, donc c et kl vérifient le sustème :
$\left\{\begin{array}{lcl} 0,2c & = & 0,12l \\ c + l & = & 1 \end{array}\right. \implies 0,2(1 - l) = 0,12l \iff 0,2 - 0,2l = 0,12l \iff 0,2 = 0,32l \iff$
$l = \dfrac{0,2}{0,32} = 0,625$, puis $c = 1 - 0,625 = 0,375$.
Donc l'état stable est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

b. L'état stable montre qu'au bout de plusieurs années l'entreprise aura 37,5 % de propriétaires de piscines sous contrat, soit plus que l'objectif de 35 %.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} c_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$
$\iff \left\{\begin{array}{lcl} c_{n+1} & = & 0,8c_n + 0,12l_n \\ l_{n+1} & = & 0,12c_n + 0,88l_n \\ c_n + l_n & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} c_{n+1} & = & 0,8c_n + 0,12(1 - c_n) \\ l_{n+1} & = & 0,12(1 - l_n) + 0,88l_n \\ c_n + l_n & = & 1 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} c_{n+1} & = & 0,68c_n + 0,12 \\ l_{n+1} & = & 0,7l_n + 0,12 \\ c_n + l_n & = & 1 \end{array}\right.$
Donc pour tout entier naturel $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$.

2.

a.

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de C	0,15	0,222	0,271	0,304	0,327	0,342	0,353

b. À la fin de l'exécution on lit $n = 6$, soit en 2021 année où l'objectif sera atteint.

3. **a.** On a pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = c_{n+1} - 0,375 = 0,68c_n + 0,12 - 0,375 = 0,68c_n - 0,225 = 0,68\left(c_n - \dfrac{0,225}{0,68}\right) = 0,68\left(c_n - 0,375\right) = 0,68v_n$.

   L'égalité, vraie pour tout naturel : $v_{n+1} = 0,68v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,68 et de premier terme $v_0 = c_0 - 0,375 = 0,15 - 0,375 = -0,225$.

   b. Dans $\mathbb{N}$, $c_n \geqslant 0,35 \iff -0,225 \times 0,68^n + 0,375 \geqslant 0,35 \iff 0,025 \geqslant 0,225 \times 0,68^n \iff \dfrac{0,025}{0,225} \geqslant 0,68^n \iff \dfrac{25}{225} \geqslant 0,68^n \iff \dfrac{1}{9} \geqslant 0,68^n \Longrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) \geqslant n\ln 0,68 \iff \dfrac{\ln 9}{\ln 0,68} \leqslant n$.

   Or $\dfrac{\ln 9}{\ln 0,68} \approx 5,7$. Il faut donc $n \geqslant 6$.

   c. On retrouve le fait qu'au bout de 6 ans l'objectif de l'entreprise (35 % de contrats chez les propriétaires de piscine) sera atteint.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

$$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. f est dérivable sur l!intervalle $[3\,;\,13]$ car somme de fonctions dérivables sur cet intervalle :
   $f'(x) = -2 - (-2)\mathrm{e}^{-2x+10} = -2 + 2\mathrm{e}^{-2x+10} = 2\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right)$.
2. **a.** Dans $[3\,;\,13]$ $f'(x) \geqslant 0 \iff 2\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right) \geqslant 0 \iff -1 + \mathrm{e}^{-2x+10} \geqslant 0 \iff$
   $\mathrm{e}^{-2x+10} \geqslant 1 \iff$ par croissance de la fonction logarithme népérien $-2x + 10 \geqslant \ln 1 \iff 10 \geqslant 2x \iff 5 \geqslant x$.
   On a donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[3\,;\,5]$.

   b. De la même façon que précédemment on trouve que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant 5$, donc sur $]5\,;\,13]$.
   La fonction f est donc croissante sur $[3\,;\,5]$ de $f(3) = -2 \times 3 + 20 - \mathrm{e}^{-2\times 3+10} = 14 - \mathrm{e}^4 \approx -40,598$ à $f(5) = -2 \times 5 + 20 - \mathrm{e}^{-2\times 5+10} = 10 - \mathrm{e}^0 = 10 - 1 = 9$, puis décroissante de $f(5) = 9$ à $f(13) = -2 \times 13 + 20 - \mathrm{e}^{-2\times 13+10} = -6 - \mathrm{e}^{-16} \approx -6$.

   c. f admet sur $[3\,;\,13]$ une primitive F définie par : $F(x) = -x^2 + 20x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+10}$.

   Don $I = \displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 + 20x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+10}\right]_3^{13} =$
   $-(13)^2 + 20 \times 13 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 13+10} - \left[-(3)^2 + 20 \times 3 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 3+10}\right] =$
   $-169 + 260 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-16} - \left[-9 + 60 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4\right] = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-16} - \mathrm{e}^4\right) + 40$
   $I \approx 12,701$ au millième près.

Partie B : Application

1. On a vu la fonction f a un maximum pour $x = 5$; donc pour l'usine le bénéfice maximal est obtenu en produisant 500 toboggans.
2. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ est égale à :
   $\dfrac{1}{13-3}\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}I$, I étant l'intégrale calculée à la fin de la partie A.
   Le bénéfice moyen est donc égale à 1,270 1 milliers d'euros, soit 1 270,10€.

Partie C : Rentabilité

D'après les variations de f la fonction s'annule une fois sur l'intervalle $[3\,;\,5]$ en a et une fois sur l'intervalle $[5\,;\,13]$ en b.

La calculatrice donne :
$f(3) \approx -40,6$ et $f(4) \approx 4,6$, donc $3 < a < 4$;
$f(3,7) \approx -0,86$ et $f(3,8) \approx 1,38$, donc $3,7 < a < 3,8$;
$f(3,73) \approx -0,14$ et $f(3,74) \approx 0,09$, donc $3,73 < a < 3,74$;
$f(3,736) \approx -0,0004$ et $f(3,737) \approx 0,02$, donc $3,736 < a < 3,737$.
De même $f(9) \approx 2$ et $f(10) \approx -0,00005$, donc $9 < b < 10$;
$f(9,9) \approx 0,2$ et $f(10) \approx -0,00005$, donc $9,9 < b < 10,0$;
$f(9,99) \approx 0,02$ et $f(10) \approx -0,00005$, donc $9,99 < b < 10,00$;
$f(9,999) \approx 0,002$ et $f(10) \approx -0,00005$, donc $9,999 < b < 10,000$.
Le bénéfice est donc positif si l'usine produit de 374 à 999 toboggans.