∽ Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers 10 juin 2015 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Par lecture graphique la tangente au point d'abscisse A, passe par le point de coordonnées B(5 ; 0), le coefficient directeur vaut : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{5-3} = -\dfrac{3}{2}$, $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$, **c'est la réponse d.**

2. T est une tangente qui coupe la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de f, en A est donc un point d'inflexion, ainsi $f''(3) = 0$, **c'est la réponse b.**

3. Comme $F'(x) = f(x)$ (puisque F est une primitive de f) et que pour tout $x \in [1 ; 7] : f(x) \geqslant 0 \Rightarrow F'(x) \geqslant 0$ sur ce même intervalle, la fonction F est donc croissante sur $[1 ; 7]$. **C'est la réponse a.**

4. Par lecture graphique : $3 \leqslant I \leqslant 4$, **C'est la réponse c.**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Au premier janvier 2016, on a perdu 15 % des vélos, soit : $200 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 200 \times 0,85$, mais on rajoute 42 nouveaux vélos mis en service, soit : $200 \times 0,85 + 42 = 212$.

2. Cette démarche restant la même si nous passons d'une année n à une année $n+1$, on perd toujours 15 % des vélos, soit encore : $u_n \times 0,85$ auquel on rajoute 42 nouveaux vélos, soit encore : $u_n \times 0,85 + 42 = u_{n+1}$.

   Ainsi : $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$ avec $u_0 = 200$, nombre de vélos au départ.

3. **a.** On obtient : $U = 238$ et $N = 4$.

U	200	212	222	231	238
N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

   b. En 2019, nous aurons 238 vélos.

4. **a.** Nous avons :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 280 \\ &= 0,85u_n + 42 - 280 \\ &= 0,85u_n - 238 \\ &= 0,85(u_n - 280) \\ &= 0,85v_n \end{aligned}$$

   (v_n) est donc bien géométrique de raison $q = 0,85$.

   Le premier terme : $v_0 = u_0 - 280 = 200 - 280 = -80$.

   b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme v_0 vaut : $v_n = v_0 \times q^n$.

   Soit encore : $v_n = -80 \times 0,85^n$.

   c. Or : $u_n = v_n + 280$.

   Ainsi : $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$.

   d. On a $u_n = a_n \times b_n + c_n$, avec :

   - $a_n = -80$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -80$
   - $b_n = 0,85^n$, qui est de la forme q^n avec $q \in]0 ; 1[$, ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0^+$

- $c_n = 280$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 280$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 280$.

Le nombre de vélos tendra vers 280 quand le nombre d'années écoulées sera grand.

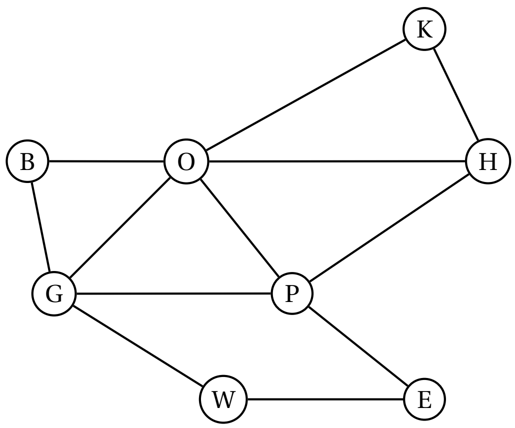
5. Au 31 décembre 2019 cinq années se sont écoulées, il faudra donc calculer le nombre de vélos pour n variant de 0 à 4 avec $u_4 \approx 238$.

On a : $u_0 + \cdots + u_4 \approx 200 + 212 + 222 + 231 + 238 = 1\,103$ vélos.

Le coût unitaire d'un vélo est de 300 €, le coût total est donc de : $1\,103 \times 300 = 330\,900$ €.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. **a.** Le graphe Γ est connexe, en effet la chaîne suivante : B-O-K-H-P-E-W-G passe par tous les sommets, ainsi deux sommets quelconques seront toujours reliés par une chaîne.

b. Le graphe n'est pas complet : W et B ne sont pas adjacents, par exemple.

2. Voici le tableau des sommets degrés :

Sommets	W	B	E	G	H	O	P	K
Degrés	2	2	2	4	3	5	4	2

Le graphe a exactement deux sommets de degré impair, étant connexe, il admet une chaîne Eulérienne d'après le théorème d'Euler.

Voici un exemple de chaîne eulérienne : H-O-B-G-W-E-P-G-O-P-H-K-O

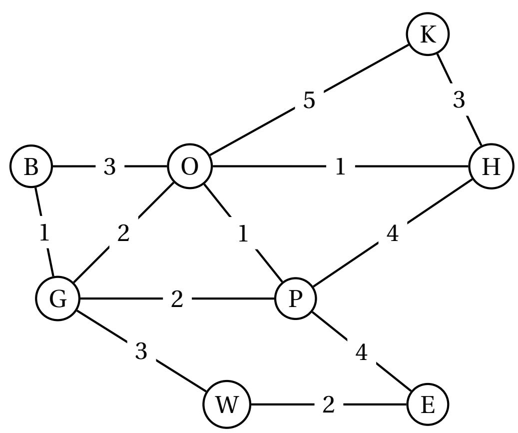
3. La matrice d'adjacence de Γ vaut :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. a. Nous lisons dans M^3, le coefficient $m_4^3 = 4$, il y a donc 4 chemins de longueurs 3 reliant H à G.

   b. Voici les quatre chemins possibles de longueurs 3 :
   G-B-O-H G-O-P-H G-P-O-H G-O-K-H

5. Nous allons utiliser pour cela l'algorithme de Dijsktra :



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

W	B	E	G	H	O	P	K	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	W(0)
|	∞	2 (W)	3 (W)	∞	∞	∞	∞	E(2)
|	∞	|	3 (W)	∞	∞	6 (E)	∞	G(3)
|	4 (G)	|	|	∞	5 (G)	5 (G)	∞	B(4)
|	|	|	|	∞	5 (G)	5 (G)	∞	O(5)
|	|	|	|	6 (O)	|	5 (G)	10 (O)	P(5)
|	|	|	|	6 (O)	|	|	10 (O)	H(6)
|	|	|	|	|	|	|	9 (H)	K(9)

Le temps le plus court de Westminster à la station Kingâ€™s Cross St Pancras vaut : 9 minutes.
Le chemin est : W-G-O-H-K

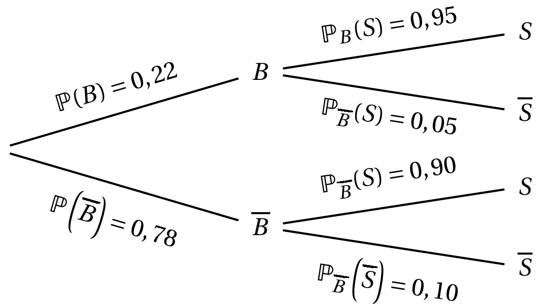
EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Dans un premier temps :

   - $\mathbb{P}(\overline{S}) = 1 - \mathbb{P}(S)$.
   - $\mathbb{P}_{\overline{B}}(S) = 1 - \mathbb{P}_B(S) = 0,05$
   - $\overline{S} = 1 - \mathbb{P}_{\overline{B}}(S) = 0,10$

   Voici l'arbre de probabilité :



2. Ici, nous calculons : $\mathbb{P}(S \cap B) = \mathbb{P}_B(S) \times \mathbb{P}(B) = 0,95 \times 0,22 = 0,209$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(S) & = & \mathbb{P}(S \cap B) + \mathbb{P}\left(S \cap \overline{B}\right)\\ & = & 0,209 + \mathbb{P}_{\overline{B}}(S) \times \mathbb{P}\left(\overline{B}\right)\\ & = & 0,209 + 0,90 \times 0,78\\ & = & 0,209 + 0,702\\ & = & 0,911\end{array}$$

4. Ici on calcule : $\mathbb{P}_S\left(\overline{B}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(S \cap \overline{B}\right)}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{0,702}{0,911} \approx 0,771$.

Partie B

X suit la loi normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 300$ et $\sigma = 2$.

1. On calcule ici : $\mathbb{P}(300 - 4 \leqslant X \leqslant 300 + 4) = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$. C'est un résultat de cours.

2. Pour cela, on utilise sa calculatrice, en utilisant la fonction : FracNormale$(0.01, \mu, \sigma)$ ou invNorm$(0.01, \mu, \sigma)$.

On trouve : $a \approx 295$ g.

Partie C

Nous avons $p = 0,9$ et :

- $n = 130$ et $n \geqslant 30$.
- $n \times p = 130 \times 0,9 = 117 \geqslant 5$.
- $n \times (1-p) = 130 \times (1-0,9) = 13 \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotiques des fréquences au seuil de 95 % vaut :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On trouve :

$$I = [0,848\ ;\ 0,952].$$

La fréquence observée vaut : $f = \dfrac{115}{130} \approx 0,8846 \approx 0,885$. Donc $f \in I$, on ne peut pas remettre l'affirmation du directeur commercial en cause. La fréquence appartient à cet intervalle avec une probabilité de 0,95.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. f définie et dérivable sur $[1\,;\,11]$ et :

$$f'(x) = -0,5 \times 2x + 2 + 15 \times \frac{1}{x} = -x + 2 + \frac{15}{x} = \frac{-x^2 + 2x + 15}{x}$$

2. On cherche dans un premier temps les racines de : $-x^2 + 2x + 15$ (*).

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 64$$

• Comme $\Delta > 0$, (*) admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = 5 \quad \text{et : } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = -3$$

• $a < 0$, nous en déduisons le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	1		5		11
$-x^2 + 2x + 15$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\dfrac{5}{2} + 15\ln(5)$	$\searrow$	$-\dfrac{77}{2} + 15\ln(11)$

$f(1) = 1,5$; $f(5) = -\dfrac{5}{2} + 15\ln(5) \approx 21,642$ et $f(11) = -\dfrac{77}{2} + 15\ln(11) \approx -2,53$.

3. **a.** Sur les intervalles :

- $[1\,;\,5]$, la fonction f admet un minimum $f(1) = 1,5$, ainsi sur cet intervalle, $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
- $[5\,;\,11]$, la fonction f est strictement décroissante et continue (elle est dérivable) de plus 0 est compris entre $f(5)$ et $f(11)$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique sur cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédaire et la stricte monotonie de la fonction f.

On en déduit que sur l'intervalle $[1\,;\,11]$, $f(x) = 0$ admet une solution unique que l'on appellera α.

b. Avec la calculatrice, nous trouvons à 10^{-2} près : $\alpha \approx 10,66$.

c. D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\,;\,11]$:

- $f(x) = 0 \iff x = \alpha$.
- $f(x) > 0 \iff x \in [1\,;\,\alpha[$.
- $f(x) < 0 \iff x \in]\alpha\,;\,11]$.

4. **a.** Pour cela, nous allons dériver F :

$$F'(x) = -\frac{1}{6} \times 3\,x^2 + 2\,x - 15 + 15 \times \ln(x) + 15\,x \times \frac{1}{x} = -0,5\,x^2 + 2\,x - 15 + 15\,\ln(x) + 15 = f(x).$$

Comme $F'(x) = f(x)$, F est bien une primitive de f.

b. $\displaystyle\int_1^{11} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{11} = F(11) - F(1) = -\frac{1595}{6} + 165 \times \ln(11) - \left(-\frac{85}{6}\right) = -\frac{755}{3} + 165 \times \ln(11) \approx$ 143,98

c. La valeur moyenne de f sur l'intervalle sur $[1\,;\,11]$ vaut à 10^{-2} prà¨s :

$$\mu = \frac{1}{b\,-\,a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{11\,-\,1}\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{143,98}{10} \approx 14,40$$

Partie B

1. Il faut que $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1\,;\,\alpha]$, et tout cela en centaines de chaises. La quantité de chaises doit donc être comprise entre 100 et 1 066 chaises environ.

2. f admet sont maximum $-\dfrac{5}{2} + 15\ln(5)$ qui est atteint pour $x = 5$.

Pour 500 chaises, le bénéfice mensuel maximal vaut environ 21,642 milliers d'euros.

C'est à dire : 21 642 €.