Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. À la fin des deux ans, je possède : $750 \times 1,038^2 + 750 \times 1,038 = 1\,690,38$ €.
2. $\ln\left(e^2 + e\right) = \ln(e[e+1]) = \ln[e] + \ln[e+1] = 1 + \ln[e+1]$
3. $\ln\left(x^2 + 3x\right)$ existe si $x^2+3x > 0 \iff x(x+3) > 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-3[\cup]0\,;\,+\infty[$; $\ln x$ existe si $x > 0$ et $\ln(x+3)$ existe si $x > -3$,donc l'égalité est vraie uniquement si $x > 0$.
4. Il y a 12 valeurs ; la médiane est la moyenne des sixième et septième valeurs : $M = \dfrac{15 + 15,2}{2} = 15,1$.
5. Une primitive de $x \longmapsto e^{2x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^{2x}$, donc :
$\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{2\times 1} - \left(\frac{1}{2}e^{2\times 0}\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2}$.
6. Le coefficient de la tangente au point d'abscisse 1 est égal au nombre dérivé de la fonction en 1, donc $f'(1) = -1$.
7. On a $F'(x) = \dfrac{2}{2x+10} = \dfrac{1}{x+5}$.
8. Comme les événements sont indépendants on a $P_A(B) = P(B)$, d'où $P_A(B) = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE I

1. Voir à la fin.
2. En arrondissant les coefficients au millième on obtient avec la calculatrice : $y = 11,115x - 11,649$.
3. 2010 correspond au rang $x = 12$, d'où un taux d'équipement estimé de : $11,115 \times 12 - 11,649 = 121,731$ ce qui est stupide. Le modèle n'est pas bon.

PARTIE II

1. **a.** La fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de même que la fonction $t \longmapsto 1+116,8e^{-t}$. Et comme la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{u}$ est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ on en déduit que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
On peut aussi calculer :
$f'(t) = -\dfrac{82,75 \times \left(-116,8e^{-t}\right)}{\left(1+116,8e^{-t}\right)^2} = \dfrac{9\,665,2e^{-t}}{\left(1+116,8e^{-t}\right)^2} > 0$ car tous les termes sont supérieurs à zéro. Donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. En 2010, on peut prévoir $\dfrac{82,75}{1+116,8e^{-12}} \approx 82,690$ soit au centième près 82,69 % comme taux d'équipement.
En 2012, on peut prévoir $\dfrac{82,75}{1+116,8e^{-14}} \approx 82,742$ soit au centième près 82,74 % comme taux d'équipement.

2. Il faut résoudre l'équation :
$\dfrac{82,75}{1+116,8\text{e}^{-t}} = 90 \iff 1+116,8\text{e}^{-t} = \dfrac{82,75}{90} \iff 116,8\text{e}^{-t} = \dfrac{82,75}{90} - 1 \iff$
$\text{e}^{-t} = \dfrac{\frac{82,75}{90}-1}{116,8} \iff \text{e}^{t} = \dfrac{116,8}{\frac{82,75}{90}-1}$.
Or $\dfrac{116,8}{\frac{82,75}{90}-1} < 0$ et la fonction exponentielle est positive : cette équation n'a pas de solution. Le taux d'équipement de 90 % ne sera jamais atteint comme le suggère la figure.
On pouvait également montrer que la limite de la fonction f était égale à 82,75 au voisinage de plus l'infini et comme la fonction est croissante la valeur 90 ne peut être atteinte.
Le taux maximal d'équipement est de 82,75 %.

EXERCICE 3 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE I

1. Les valeurs manquantes sont 9,625 %, 68,5 % et 100 %.
2. La probabilité est égale à $\dfrac{39}{100} = 0,39$.

PARTIE II

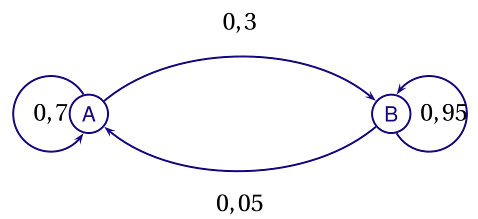
1. $p(\text{B}\cap\text{R}) = \dfrac{79}{800} = 0,098\,75$.
2. $p(\text{B}\cup\text{C}) = p(\text{B}) + p(\text{C}) - p(\text{B}\cap\text{C})$.
On a $p(\text{B}) = 0,685$; $p(\text{C}) = \dfrac{100}{800} = 0,125$ et $p(\text{B}\cap\text{C}) = \dfrac{39}{800} = 0,048\,75$.
Donc $p(\text{B}\cup\text{C}) = 0,685 + 0,125 - 0,048\,75 = 0,761\,25$, soit au millième près : $p(\text{B}\cup\text{C}) \approx 0,761$.

PARTIE III

1. Il y a sur les 58 personnes 17 cadres, donc la probabilité est égale à $\dfrac{17}{58} \approx 0,293$.
2. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = \dfrac{17}{58}$.
La probabilité que parmi ces trois personnes, deux exactement soient cadres est égale à :
$3\times\left(\dfrac{17}{58}\right)^2\left(1-\dfrac{17}{58}\right) = 3\times\left(\dfrac{17}{58}\right)^2\times\dfrac{41}{58} = \dfrac{2\,091}{195\,112} \approx 0,1821$ soit au millième près 0,182.

EXERCICE 3 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. En respectant l'ordre alphabétique des sommets, la matrice de transition correspondant à ce graphe probabiliste est $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$.

3. On a en 2009, $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,336 & 0,664 \end{pmatrix}$.

   Puis en 2010, $P_3 = P_2 \times M = \begin{pmatrix} 0,336 & 0,664 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2684 & 0,7316 \end{pmatrix}$.

4. **a.** Si $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste en $2007 + n$, alors pour tout naturel n,

   $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$ et $a_n + b_n = 1 \iff \begin{cases} a_{n+1} & = & 0,7a_n + 0,05b_n \\ b_{n+1} & = & 0,3a_n + 0,95b_n \\ a_n + b_n & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1} & = & 0,7a_n + 0,05(1 - a_n) \\ b_{n+1} & = & 0,3(1 - b_n) + 0,95b_n \\ b_n & = & 1 - a_n \end{cases} \iff$

   $\begin{cases} a_{n+1} & = & 0,65a_n + 0,05 \\ b_{n+1} & = & 0,65b_n + 0,3 \\ b_n & = & 1 - a_n \end{cases}$

   En particulier on a pour tout naturel n, $a_{n+1} = 0,65a_n + 0,05$.

   b. Si $a_n = \dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0,65^n$.

   $\dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0,65^0 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} = \dfrac{21}{35} : \dfrac{3}{5} = 0,6 = a_0$;

   $\dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0,65^1 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0,65 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{10,4}{35} = \dfrac{15,4}{35} = \dfrac{2,2}{5} = \dfrac{4,4}{10} = 0,44$.

   Or $a_1 = 0,65a_0 + 0,05 = 0,65 \times 0,6 + 0,05 = 0,39 + 0,05 = 0,44$.

   $\dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0,65^2 = 0,336$.

   Or $a_2 = 0,65a_1 + 0,05 = 0,65 \times 0,44 + 0,05 = 0,286 + 0,05 = 0,336$.

   La formule est donc vérifiée au rang 0 , 1 et 2.

5. **a.** Comme $0 < 0,65 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} = 0,65^n = 0$, donc

   $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{35} \times 0,65^n = \dfrac{1}{7}$.

   La suite (a_n) converge vers $\dfrac{1}{7}$.

   b. On vient de voir que la limite de la suite (a_n) est $\dfrac{1}{7}$; il est donc impossible d'envisager qu'à terme aucun des salariés de cette entreprise n'utilise sa voiture personnelle pour aller au travail.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE I : ÉTUDE D'UNE FONCTION

1. $f(x) = 0 \iff 5(1 - \ln x)(\ln x - 2) = 0 \iff \begin{cases} 1 - \ln x & = & 0 \\ \ln x - 2 & = & 0 \end{cases} \iff$

   $\begin{cases} 1 & = & \ln x \\ \ln x & = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e} & = & x \\ x & = & \mathrm{e}^2 \end{cases}$

   On a donc $S = \left\{\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e}^2\right\}$

2. **a.** Le trinôme $5(1 - X)(X - 2)$ a pour racines 1 et 2 ; on sait que ce trinôme est négatif, sauf entre les racines.

   b. Avec $X = \ln x$, on voit que le signe de $f(x)$ dépend de la valeur de $\ln x$ par rapport à 1 et à 2, donc de la valeur de x par rapport à e et e^2 : $f(x)$ est négatif sauf sur $]\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e}^2[$.

x	0		e		e^2		$+\infty$
signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

3. a. Sur $]0~;~+\infty[$, on a :

$f'(x) = 5\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)+5(1-\ln x)\times\dfrac{1}{x} = 5\dfrac{-\ln x+2+1-\ln x}{x} = \dfrac{5(3-2\ln x)}{x}$.

b. Comme $x >$, le signe de $f'(x)$ est celui de $3-2\ln x$.

- $3-2\ln x>0 \iff 2\ln x<3 \iff \ln x<\dfrac{3}{2} \iff x<\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$;
- $3-2\ln x=0 \iff x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$;
- $3-2\ln x<0 \iff x>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

Donc la fonction f est croissante sur $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right[$ et décroissante sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}~;~+\infty\right[$.

$f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right) = 5\left(1-\ln \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)\left(\ln \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-2\right) = 5\left(1-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-2\right) = \dfrac{5}{4}$ est le maximum de f sur $]0~;~+\infty[$.

4. Limite en 0 : comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$, on a :

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-\ln x)=+\infty$;

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\ln x-2)=-\infty$, donc par produit des limites :

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

Limite en plus l'infini : comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on a

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty$;

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\ln x-2)=+\infty$, d'où par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

5. On a vu que le maximum de la fonction est égal à $\frac{5}{4}=1,25$.

Sur l'intervalle $\left]0~;~\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right[$, la fonction f continue car dérivable strictement croissante d'une valeur inférieure à 1 à une valeur supérieure à 1, il existe un réel unique α de l'intervalle tel que $f(\alpha)=1$.

Même raisonnement sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}~;~+\infty\right[$ où il existe un réel unique β tel que $f(\beta)=1$.

La calculatrice donne $\alpha\approx 3,58$ et $\beta\approx 5,60$.

PARTIE II : APPLICATION

1. On a vu que $f(x)\geqslant 0$ sur $\left[\mathrm{e}~;~\mathrm{e}^2\right]$.

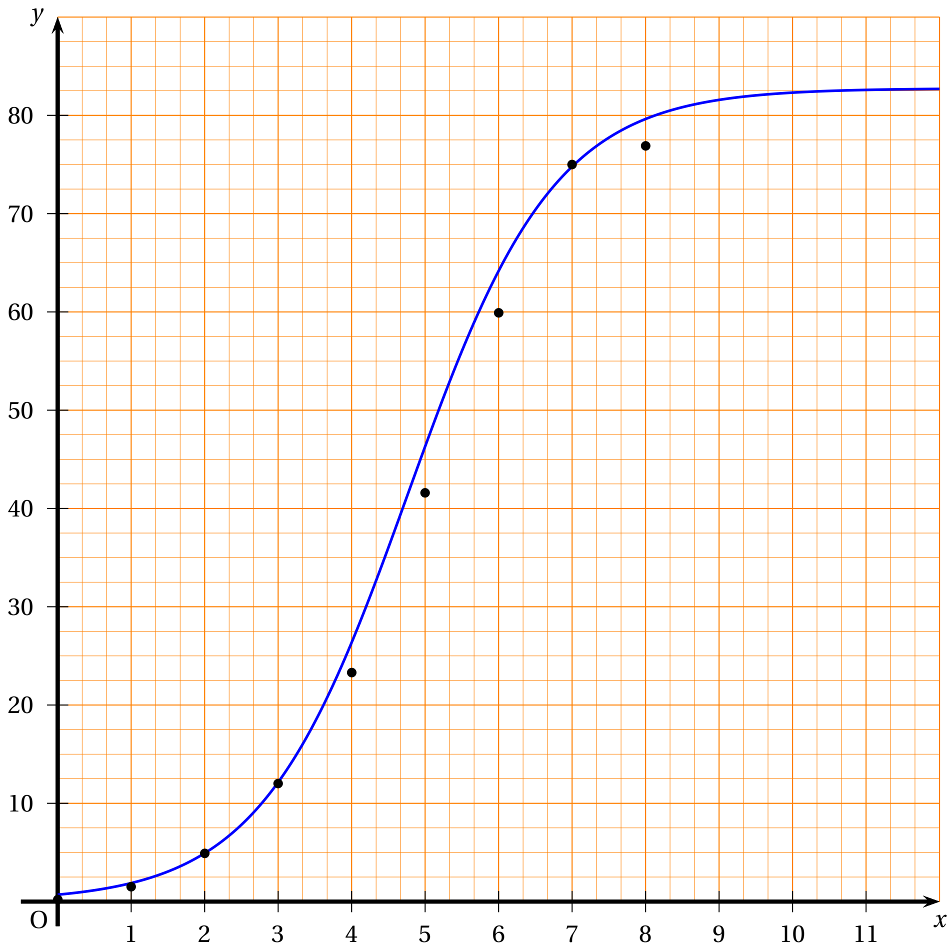
Or $\mathrm{e}\approx 2,718$ et $\mathrm{e}^2\approx 7,389$.

Pour ne pas travailler à perte, il faut produire de 272 à 738 jouets.

2. On a un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 euros si $f(x)>1$, donc d'après la partie I, si $x\in]\alpha~;~\beta[$ soit si on produit de 359 à 737 jouets.

ANNEXE 1 (à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 2 (commun à tous les candidats)



ANNEXE 2 (à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 4 (commun à tous les candidats)