Corrigé du baccalauréat ES Métropole–La Réunion septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Question 1 :
La fonction est croissante uniquement sur $]-\infty\ ;\ 0]$, sa dérivée est donc positive sur cet intervalle ; ceci élimine la réponse A et la réponse C. Il ne reste que la réponse B

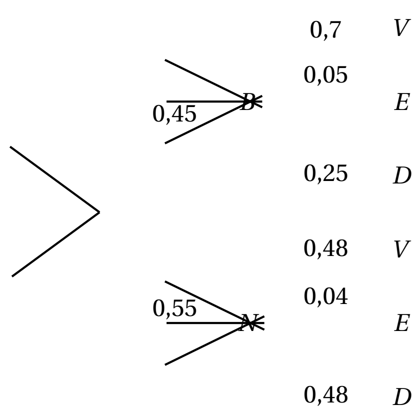
Question 2 :
Une primitive F de f vérifie $F'(x) = f(x)$, donc si $f(x) > 0$, la fonction F est croissante. Or $f(x) > 0$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$, donc la réponse A est à éliminer.
$f(x) <$ sur $]-\infty\ ;\ -1[$, donc F est décroissante sur cet intervalle ce qui élimine la réponse C. Reste la réponse B.

Question 3 :
La fonction g est définie si $f(x) > 0$ soit comme on vient de le voir sur $]1\ ;\ +\infty[$. Réponse B.

Question 4 :
Si $g(x) = \ln[f(x)]$, alors $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
Donc $g'(1) \times g'(2) = \dfrac{f'(1)}{f(1)} \times \dfrac{f'(2)}{f(2)} = \dfrac{f'(1)f'(2)}{f(1)f(2)}$.
Or $f(1) > 0$, $f(2) > 0$, $f'(1) < 0$ et $f'(2) < 0$, donc $g'(1) \times g'(2) > 0$. Réponse A.

EXERCICE 2 **5 points**

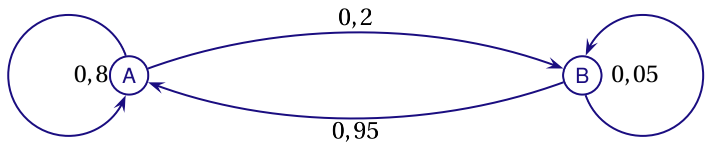
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $p(N) = 1 - p(B) = 1 - 0,45 = 0,55$.
2. 

3. On a $p(N \cap V) = p(N) \times p_N(V) = 0,55 \times 0,48 = 0,264$.
4. D'après la loi des probabilités totales :
$p(V) = p(B \cap V) + p(N \cap V)$.
Or $p(B \cap V) = p(B) \times p_B(V) = 0,45 \times 0,7 = 0,315$. Donc
$p(V) = p(B \cap V) + p(N \cap V) = 0,315 + 0,264 = 0,579$.
5. $p_V(N) = \dfrac{p(V \cap N)}{p(V)} = \dfrac{0,264}{0,579} \approx 0,47323 \approx 0,473$ au millième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1. a.

b. En respectant l'ordre alphabétique des sommets, la matrice de transition M de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,95 & 0,05 \end{pmatrix}$.

2. a. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$.

b. La deuxième semaine l'état probabiliste est :

$P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,95 & 0,05 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,821 & 0,179 \end{pmatrix}$.

La probabilité qu'un employé travaille le matin la deuxième semaine est égale à 0,821.

3. a. La matrice de transition ne contenant pas de terme nul l'état stable P est la limite de P_n et vérifie l'équation :

$\mathrm{P} = \mathrm{P}M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,95 & 0,05 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8x + 0,95y & 0,2x + 0,05y \end{pmatrix} \iff$

$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0,8x + 0,95y \\ y & = & 0,2x + 0,05y \end{array} \right.$.

Ainsi x et y vérifient l'équation : $x = 0,8x + 0,9y$.

b. En reprenant le système précédent :

$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0,8x + 0,95y \\ y & = & 0,2x + 0,05y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0,2x & = & 0,95y \\ y & = & 0,2x + 0,05y \end{array} \right.$

Or on sait que $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$, d'où $0,2x = 0,95(1 - x) \iff 0,2x = 0,95 - 0,95x \iff 1,15x = 0,95 \iff 115x = 95 \iff 23x = 19 \iff x = \dfrac{19}{23}$ et par conséquent $y = 1 - \dfrac{19}{23} = \dfrac{4}{23}$.

Donc $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{19}{23} & \dfrac{4}{23} \end{pmatrix}$.

c. Le résultat précédent signifie qu'à terme $\dfrac{19}{23} \approx 0,826$ soit à peu près 82,6 % des employés travailleront le matin : le souhait du directeur est réalisable.

4. La loi de probabilité associée à la variable égale au nombre d'employés travaillant le matin est une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{19}{23}$.

La probabilité qu'aucun des employés ne travaille l'après-midi est égale à la probabilité que les quatre travaillent le matin qui est égale à $\left(\dfrac{19}{23}\right)^4$.

La probabilité demandée est donc égale à :

$1 - \left(\dfrac{19}{23}\right)^4 = \dfrac{23^4 - 19^4}{23^4} \approx 0,5343 \approx 0,534$.

La probabilité qu'au moins un des quatre employés travaille l'après-midi est d'environ 0,534.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Le nuage de points n'a pas une forme allongée ; un ajustement affine ne semble pas adapté.
2. **a.**

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	5,63	5,70	5,90	6,18	6,49	6,73

b. Après arrondi au millième des coefficients donnés par la calculatrice on obtient
$z = 0,233x + 5,29$.

c. On a $z = \ln y = 0,233x + 5,29 \iff y = \mathrm{e}^{0,233x+5,29} \iff y = \mathrm{e}^{5,29} \times \mathrm{e}^{0,233x}$.
Or $\mathrm{e}^{5,29} \approx 198,3 \approx 198$ à l'unité près. Donc :
$\approx 198\mathrm{e}^{0,233x}$.

3. **a.** 2008 correspond au rang $x = 9$ d'où une estimation du montant des exportations égal à environ :
$y = 198\mathrm{e}^{0,233\times 9} = 198\mathrm{e}^{2,097} \approx 1\,612,06 \approx 1\,612$ milliards de dollars.

b. De 2000 à 2008 les exportations sont passées de 280 à 1 612 soit un pourcentage d'augmentation de $\left(\dfrac{1\,612}{280} - 1\right) \times 100 \approx 475\,\%$.
Ce pourcentage est bien supérieur à 450 %.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. $f(0) = \dfrac{5\times 0 - 5}{\mathrm{e}^0} = -5$.
2. **a.** Pour $x > 0$, $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\frac{5x-5}{x}}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} = \dfrac{5 - \frac{5}{x}}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$

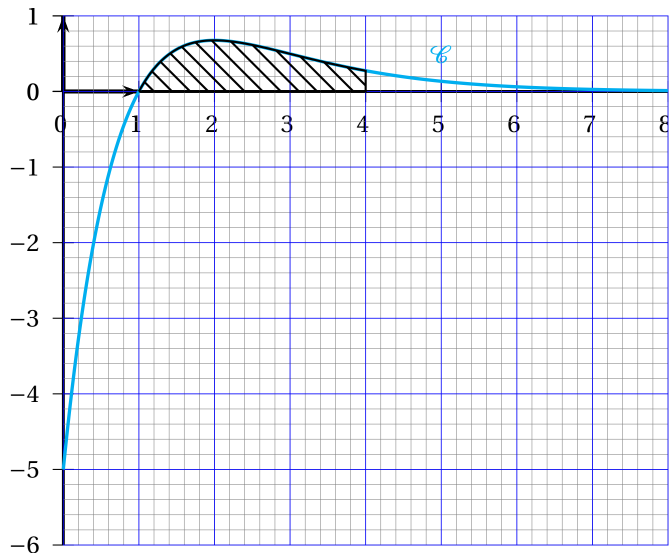
b. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 5 - \frac{5}{x} = 5$.
D'autre part on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, d'où finalement par quotient de limites :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Graphiquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

3. **a.** Le dénominateur de f étant supérieur à zéro, la fonction est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{5\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(5x-5)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(5-5x+5)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(10-5x)}{(\mathrm{e}^x)^2}$.

b. Le dénominateur et e^x sont supérieurs à zéro, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $10 - 5x$; d'où :
• $10 - 5x > 0 \iff 10 > 5x \iff x < 2$: sur $[0 ; 2]$ $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante de $f(0) = -5$ à $f(2) = \dfrac{5}{\mathrm{e}^2} = 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0,68$;
• $10 - 5x < 0 \iff 10 < 5x \iff x > 2$: sur $[2~;~+\infty[$ $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante de $f(2) = 5\mathrm{e}^{-2}$ à 0. (limite en plus l'infini)

c. Voir la question précédente.

4.



5. **a.** F est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$F'(x) = -5\text{e}^{-x} - 5x \times (-1)\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(-5+5x) = (5x-5)\text{e}^{-x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. On a $f(1) = 0$ et sur $[1~;2]$ la fonction f est croissante donc sur cet intervalle $f(x) \geqslant 0$.

D'autre part on a vu que sur $[2~;~+\infty[$, f est décroissante mais est supérieure à zéro.

Conclusion : sur $[1~;4]$, $f(x) \geqslant 0$.

Par conséquent l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ est égale à l'intégrale :

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1) = -5 \times 4\text{e}^{-4} - \left[-5 \times 1\text{e}^{-1}\right] = 5\text{e}^{-1} - 20\text{e}^{-4}$

$\approx 1,473 \approx 1,47$ unité d'aire au centième près.