Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord 4 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Le prix est multiplié par 1,2 puis par 1,3 soit par $1,2 \times 1,3 = 1,56$ soit une augmentation de 56 %.
2. $\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)} = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{2\ln \mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}$.
3. $\mathrm{e}^{-3\ln 2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{3\ln 2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2^3}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 8}} = \dfrac{1}{8}$.
4. Si $F(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$, alors $F'(x) = -\dfrac{1}{2} \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$.
5. Une équation de cette tangente est : $y - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^0(x-0) \iff y - 1 = x \iff y = x+1$.
6. La fonction n'est pas définie si :
   $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = \ln 1 \iff x = 0$. Réponse **b.**
7. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = (2x-1) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$: ceci signifie que la droite dont une équation est $y = 2x-1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.
8. Le graphique montre qu'il existe deux solutions positives ($\approx 0,138$ et $\approx 1,564$)

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. $f_V = \dfrac{179}{500} = \dfrac{368}{1\,000} = 0,358$;
   $f_P = \dfrac{133}{500} = \dfrac{266}{1\,000} = 0,266$;
   $f_M = \dfrac{188}{500} = \dfrac{376}{1\,000} = 0,376$.
2. $500d^2_{\text{obs}} = 500\left[\left(f_V - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(f_P - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(f_M - \dfrac{1}{3}\right)^2\right] = 500 \times 0,006\,963 = 3,481\,3 \approx 3,481$.
3. Le décile contient les 200 dernières valeurs de la série, donc après les 1 800 premières valeurs. On complète le tableau en rajoutant la ligne des effectifs cumulés croissants :

Intervalle auquel appartient $500d^2_{\text{obs}}$	[0 ; 0,5[	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[
effectifs cumulés	163	602	1 060	1 410	1 641	1 802	1 882	1 929	1 966	2 000

   On voit que $D_9 \in [2,5\ ;\ 3[$.

4. On a $500d^2_{\text{obs}} > D_9$, donc on peut affirmer avec un risque inférieur à 10 % que « la prairie est composée d'autant de fleurs de chaque variété » est fausse.

EXERCICE 3 **5 points**

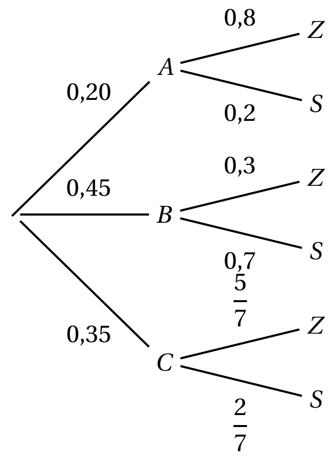
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. La calculatrice donne $y = 0,8x + 47,2$.
2. Décembre 2009 correspond au rang $x = 12$ ce qui donne :
   $0,8 \times 12 + 47,2 = 9,6 + 47,2 = 56,8 \approx 57$ prêts.

Partie B

1.



2. $p(A \cap Z) = p(A) \times p_A(Z) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$.
3. On a de même :
   $p(B \cap Z) = p(B) \times p_B(Z) = 0,45 \times 0,3 = 0,135$;
   $p(C \cap Z) = p(C) \times p_C(Z) = 0,35 \times \dfrac{5}{7} = 0,05 \times 5 = 0,25$.
   D'après la formule des probabilités total les :
   $p(Z) = p(A \cap Z) + p(B \cap Z) + p(C \cap Z) = 0,16 + 0,135 + 0,25 = 0,545$.
4. Il faut trouver $p_Z(C) = \dfrac{p(Z \cap C)}{p(Z)} = \dfrac{0,25}{0,545} = \dfrac{250}{545} = \dfrac{50}{109}$.

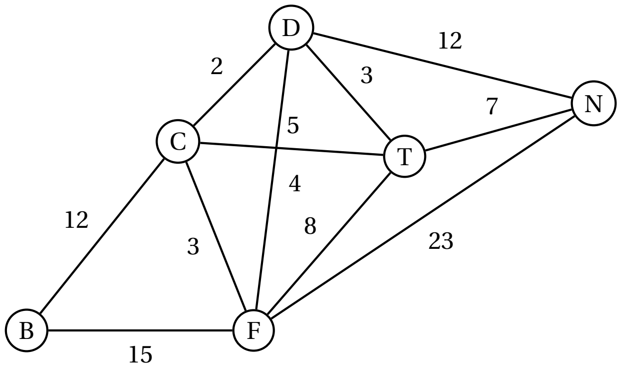
EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe	2	4	4	5	3	4

   b. Il existe une chaîne qui contient tous les sommets par exemple : B-C-D-N-T-F : le graphe est connexe. Il existe un chemin reliant deux sommets quelconques.
2. Il n'y a que deux sommets de degré impair F et N ; il existe donc une chaîne eulérienne partant de l'un d'entre eux et finissant à l'autre.
   Il est possible de passer par les six sommets en empruntant chacun des dix chemins une seule fois : F-B-C-F-D-C-T-F-NT-D-N.
3. **a.** Le plus haut degré est 5, donc $n \leqslant 5 + 1 \iff n \leqslant 6$.
   Le graphe {C, D, F T} est complet donc $4 \leqslant n$.
   Donc $4 \leqslant n \leqslant 6$.
   b. Couleur 1 : F ;
   Couleur 2 : C et N ;
   Couleur 3 : B et T ;
   Couleur 4 : D.

4.



On utilise l'algorithme de Dijskra :

B	C	D	F	N	T	sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	B 0
	12 B	∞	15 B	∞	∞	C 12
		14 C	15 B	∞	17 C	D 14
			15 B	26 D	17 C	F 15
				26 D	17 C	T 17
				24 T		N 21

On remonte à partir de N : le plus court chemin est B–> C–> T–> N qui fait 24 km.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Préliminaires

1. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = 6 \times \dfrac{1}{x} - 2 \times 3x^2 = \dfrac{6}{x} - 6x^2$.
2. On a donné le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$; donc :
   - sur $]0\,;1[$, $g'(x) > 0$, la fonction g est croissante ;
   - sur $]1\,;\,+\infty[$, $g'(x) < 0$: la fonction g est décroissante.

   $g(1) = -2 - 3 = -5$ est le maximum de g
3. Comme le maximum est inférieur à zéro, on en déduit que pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie A

1. On a $f(x) = x + 3\dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x^2}$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ par produit et somme de limites :

   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Limite en 0 :

   On a $\displaystyle\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. **a.** Sur $]0\,;\,+\infty[$,

   $$f'(x) = 1 + \frac{\frac{3}{x} \times 2x^2 - 12x\ln x}{4x^4} = 1 + \frac{6x - 12x\ln x}{4x^4} = \frac{4x^4 + 6x - 12x\ln x}{4x^4} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln x}{2x^3} = -\frac{6\ln x - 2x^3 - 3}{2x^2} = -\frac{g(x)}{2x^3}.$$

b. Comme sur $]0~;~+\infty[$, $2x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $g(x)$, donc comme on a vu que la fonction g est négative, son opposée est positive ; $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $]0~;~+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

Partie B

1. Sur $]0~;~+\infty[$ $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x} \times x - (1+\ln x)x^2\right) = x - \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1+\ln x - 1}{x^2} = x - \dfrac{3\ln x}{2x^2} = f(x)$.
Donc f est bien une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

2. On a vu que f est croissante et $f(1) = 1+0 = 1$, donc f est positive sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$.
L'aire de la surface colorée est donc égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{3}{2} \times \frac{1+\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \left[\frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{3}{2} \times \frac{1+\ln 1}{1}\right] = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{\mathrm{e}} \approx 3{,}59089$ soit environ 3,59 unités d'aire au centième près (ce que l'on vérifie à peu près sur le dessin).