Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ novembre 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** • On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

• On sait que pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(2x - x^2\right) = \mathrm{e}^{-x}x(2-x)$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x(2-x)$, donc négatif sauf sur $]0\,;\,2[$.
D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

c. Le tableau de variations montre que $f(x) \geqslant 0$, ce qui est évident d'après l'énoncé ($x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$)

2. **a.** La fonction étant positive sur $\mathbb{R}$:

• si $a < 0$, $I(a) < 0$;

• si $a = 0$, $I(a) = 0$;

• si $a > 0$, $I(a) > 0$.

b. On pose :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^2 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2x \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$$

Toutes les fonctions étant continues, on peut intégrer par parties :

$I(a) = \left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a + \displaystyle\int_0^a 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a + J(a)$.

Pour calculer l'intégrale $J(a)$ on fait encore une intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & 2x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2 \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x}\end{array}\right.$$

Donc $J(a) = [-2x\mathrm{e}^{-x}]_0^a - \displaystyle\int_0^a -2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-2x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a - \left[2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a$.

Finalement $I(a) = \left[-x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a = \mathrm{e}^{-a}\left(-a^2 - 2a - 2\right) + 2$

Soit $I(a) = 2 - 2\mathrm{e}^{-a}\left(\dfrac{a^2}{2} + a + 1\right)$.

c. En multipliant chaque membre par $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^a$, $I(a) = 2 - 2\left(\dfrac{a^2}{2} + a + 1\right) \iff$
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^a I(a) = \mathrm{e}^a - \dfrac{a^2}{2} - a - 1 = \mathrm{e}^a - \left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$.

3. **a.** Il faut montrer qu'elles ont un point commun (d'abscisse zéro) et la même tangente en ce point.

Il faut donc démontrer que $\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & h(0) \\ g'(0) & = & h'(0) \end{array}\right.$

Or $g(0) = 1$ et $h(0) = 1$.

D'autre part $g'(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow g'(0) = 1$ et $h'(x) = 1 + x \Rightarrow h'(0) = 1$.

Les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point $(0\,;\,1)$.

b. On a démontré que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^a I(a) = \mathrm{e}^a - \left(1 + a + \dfrac{a^2}{2}\right)$, ce qui signifie que $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^a I(a) = g(a) - h(a)$.

La différence $g(a) - h(a)$ est du signe de $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^a I(a)$, donc du signe de $I(a)$, qui a été démontré à la question 2. a.

Donc si $a < 0, g(a) - h(a) < 0$, qui signifie que $\mathscr{C}$ est sous $\mathscr{P}$;

Si $a = 0$, les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont le point$(0\,;\,1)$ commun ;

Si $a > 0$, $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{P}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.

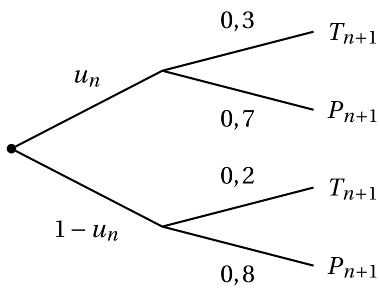
D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

b. D'après le principe des probabilités totales :

$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \dfrac{1}{4}$.

c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



d. Toujours d'après le principe des probabilités totales :

$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2$.

e. La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.

Il semble que u_n ait pour limite $0,222\ldots$.

2. **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{10}u_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{10}u_n - \dfrac{1}{45} = \dfrac{1}{10}\left(u_n - \dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{1}{10}v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$; son premier terme est $v_1 = u_1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{18}$.

b. On sait que $v_n = v_1\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Comme $u_n = v_n + \dfrac{2}{9}$, on a $u_n = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{18}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$.

c. Comme $0 < \dfrac{1}{10} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{9}$.

Or $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. a. Comme $7 = 3\times 2+1 \iff -3\times 2+7\times 1 = 1$, le couple $(-2 ; 1)$ vérifie l'équation $3u+7v = 1$. $3\times(-2)+7\times 1 = 1$ donne en multipliant par 10^{2n}, $3\times\left(2\times 10^{2n}\right)+7\times 10^{2n} = 10^{2n}$.

Le couple $\left(-2\times 10^{2n} ;\ 10^{2n}\right)$ est donc une solution particulière de l'équation (E).

b. $\left\{\begin{array}{lcl} 3x+7y & = & 10^{2n} \\ 3\times(-2)+7\times 1 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 3x+7y & = & 10^{2n} \\ 3\times\left(-2\times 10^{2n}\right)+7\times 10^{2n} & = & 10^{2n} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ (par différence) $3\left(x+2\times 10^{2n}\right)+7\left(y-10^{2n}\right) = 0 \iff$

$3\left(x+2\times 10^{2n}\right) = 7\left(10^{2n}-y\right)$ (1).

3 divise $7\left(10^{2n}-y\right)$ et est premier avec 7 : il divise donc $10^{2n}-y$. Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $10^{2n}-y = 3k \iff y = 10^{2n}-3k$.

En reportant dans l'égalité (1) : $3\left(x+2\times 10^{2n}\right) = 7\left(10^{2n}-10^{2n}+3k\right) \iff x+2\times 10^{2n} = 7k \iff x = 7k-2\times 10^{2n}$.

2. a. $100 = 7\times 14+2 \iff 100 \equiv 2 \mod 7$.

$(x ; y)$ solution de (G) signifie $3x^2+7y^2 = 10^{2n} \iff 3x^2+7y^2 = \left(10^2\right)^n \iff 3x^2+7y^2 = 100^n$.

Or $100\equiv 2 \mod 7 \Rightarrow 100^n \equiv 2^n \mod 7$.

Donc $3x^2+7y^2 \equiv 2^n \mod 7$.

Mais $7y^2 \equiv 0 \mod 7$, donc finalement $3x^2 \equiv 2^n \mod 7$.

b.

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.	0	3	5	6	6	5	3

c. De trois choses l'une :

- $n = 3p, p\in N$; alors $2^{3p} = \left(2^3\right)^p = 8^p$. Or $8\equiv 1 \mod 7 \Rightarrow 8^p\equiv 1 \mod 7$;
- $n = 3p+1$; alors $2^{3p+1} = 2^{3p}\times 2 = 8^p\times 2$. Or $8\equiv 1 \mod 7 \Rightarrow 8^p \equiv 1 \mod 7 \Rightarrow$
  $2^{3p}\times 2\equiv 2 \mod 7$;
- $n = 3p+2$; alors $2^{3p+2} = 2^{3p}\times 2^2 = 4\times 2^{3p} = 4\times 8^p$. Comme
  $8^p\equiv 1 \mod 7, 4\times 8^p \equiv 4 \mod 7$.

Conclusion : 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

On vient de voir que les restes dans la division par 7 de 2^n ne sont pas les mêmes que ceux de la division de $3x^2$ par 7. Donc $3x^2$ et 2^n ne peuvent être congrus modulo 7. D'après le 2. a. il n'y a donc pas de solution pour l'équation (G).

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On a B(1 ; 0 ; 0) et C(1 ; 1 ; 0), donc $\mathrm{I}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

   F(1 ; 0 ; 1), donc $\mathrm{J}\left(1\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

   H(0 ; 1 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), donc $\mathrm{K}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.

2. On a $\overrightarrow{\mathrm{IK}}\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$; donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IK}} = -1+0+1 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux ;

   $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$; donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 0-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

   Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ ne sont manifestement pas colinéaires ; ils définissent donc le plan (IJK). Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est donc normal à ce plan.

   Une équation du plan (IJK) est donc :

   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{IJK}) \iff 2x+1y+1z+d=0$.

   Comme I appartient à ce plan on a $\mathrm{I}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right) \in (\mathrm{IJK}) \iff 2+\dfrac{1}{2}+d=0 \iff d=-\dfrac{5}{2}$. Donc

   $$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{IJK}) \iff 2x+y+z-\frac{5}{2}=0 \iff 4x+2y+2z-5=0.$$

3. **a.** On calcule $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{CD}) \iff \overrightarrow{\mathrm{D}M} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{DC}} \iff$
   $\left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& \alpha\times 1\\ y-1 &=& \alpha\times 0\\ z-0 &=& \alpha\times 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \alpha\\ y &=& 1\\ z &=& 0\end{array}\right. \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

   b. Les coordonnées de R vérifient l'équation de (IJK) et les équations paramétriques de (DC), donc le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \alpha\\ y &=& 1\\ z &=& 0\\ 4x+2y+2z-5 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \alpha\\ y &=& 1\\ z &=& 0\\ 4\alpha+2-5 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \alpha\\ y &=& 1\\ z &=& 0\\ \alpha &=& \dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{3}{4}\\ y &=& 1\\ z &=& 0\\ \alpha &=& \dfrac{3}{4}\end{array}\right. \quad \text{Donc } \mathrm{R}\left(\frac{3}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right).$$

   c. Cf. la figure plus bas.

4. Cf. la figure plus bas.

   Section avec la face BCGF : [IJ]

   Section avec la face ABCD : [IR]

   Pour la section avec EFGH : on utilise la propriété : « si deux plans sont parallèles tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».

   On trace donc la parallèle à la droite (IR) contenant K qui coupe [FE] et [GH] en deux points que l'on joint à J et à R. Le contour de l'intersection est colorée en bleu.

5. **a.** Comme G(1 ; 1 ; 1), $d(\mathrm{G}, (\mathrm{IJK})) = \dfrac{|4+2+2-5|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{24}} = \dfrac{3}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

b. La sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants si la distance de G au plan (IJK) est inférieure au rayon de la sphère. Ce rayon est égal à GF.
$GF^2 = 0^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow GF = 1$.
Or $\dfrac{\sqrt{6}}{4} < 1$ (car $6 < 4^2 \Rightarrow \sqrt{6} < 4$).
Donc la sphère et le plan sont sécants en un cercle de centre O′ et de rayon r tel que, d'après le théorème de Pythagore :
$GF^2 = GO'^2 + FO'^2 \iff 1^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + r^2 \iff r^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 \iff$
$r^2 = 1 - \dfrac{6}{16} = \dfrac{10}{16} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. a. Calcul du module : $|z_A|^2 = 1^2 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$.
On peut donc écrire $z_A = 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
De façon évidente $z_B = 2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

b. On obtient A en traçant la perpendiculaire à [OU] contenant U(0; 1) et le cercle de centre O et de rayon 2 et B est le symétrique de O autour de V(0; 1).
Voir la figure plus bas.

c. Comme OA = OB = 2, le triangle est isocèle ; $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$, donc le triangle n'est ni équilatéral, ni rectangle.

2. a. $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
Un argument de $\dfrac{z_B}{z_A}$ est donc $\dfrac{\pi}{6}$.
On peut donc en déduire que $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{6} \mod 2\pi$, cet angle étant celui de la rotation.

b. La rotation r est donc la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. Son écriture complexe est donc $z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

3. a. L'image de Γ cercle de centre A et passant par O est le cercle de même rayon OA de centre r(A) =B passant par r'(O) = O, c'est-à-dire Γ′.

b. On a $z_I = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

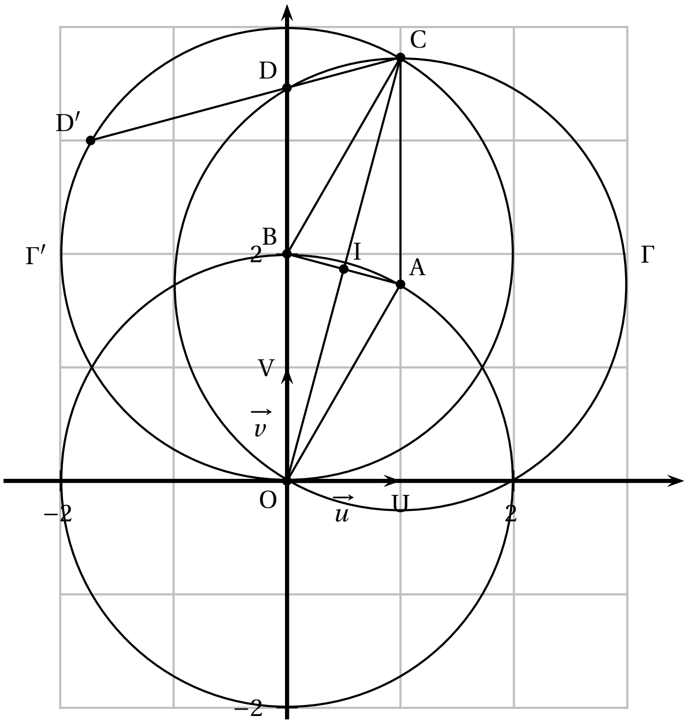
c. C est sur les deux cercles Γ et Γ′ de centres respectifs A et B et de rayon 2, donc CA = CB = 2.
Or OA = OB = 2, donc OA = AC = CB = BO = 2 : le quadrilatère OACB est un losange.

d. D'après la question précédentes les diagonales [AB] et [OC] ont le même milieu ; or le milieu de [AB] est I qui est aussi celui de [OC].
I milieu de [OC] $\iff \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \iff z_C = 2z_I = 1 + \mathrm{i}\left(2 + \sqrt{3}\right)$

4. a. Calculons AD : $|z_D - z_A| = \left|2\mathrm{i}\sqrt{3} - 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \left|-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$. [AD] est bien un rayon de Γ.

b. Comme D appartient à Γ, son image appartient à Γ′ et au cercle de centre O et de rayon [OD].
Par définition : $z_{D'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 2\mathrm{i}\sqrt{3} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) \times 2\mathrm{i}\sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

5. On a $\overrightarrow{\text{DC}}\left(1\,;\,(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\right)$ ou $\overrightarrow{\text{DC}}\left(1\,;\,(2-\sqrt{3})\right)$;
$\overrightarrow{\text{DD}'}\left(-\sqrt{3}\,;\,3-2\sqrt{3}\right)$.
Le coefficient de colinéarité ne peut être que $-\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)=3-2\sqrt{3}$, donc on a bien $\overrightarrow{\text{DD}'}=-\sqrt{3}\overrightarrow{\text{DC}}$, ce qui signifie que les points C, D et D′ sont alignés.



ANNEXE

Exercice 3

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie