Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole & La Réunion ∽ septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soient E et F les évènements :
   E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
   F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
   Montrer que $p(E) = 0,02$ et $p(F) = 0,17$.
3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
   X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.
4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)
   a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1 - (0,9)^n$.
   b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.
   c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) : \qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. **a.** Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') : \quad y' = 2y + 8$.
   b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E),
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\mathrm{A}(\ln 2\ ;\ 0)$? Si oui la préciser.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.
Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

   a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$
2. **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.

   c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

   d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$.
3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\| = \mathrm{AB}$ est :

   a. la médiatrice de [AC].

   b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

   c. la médiatrice de [AI].

   d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.
4. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(2\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) = 0$$

   est :

   a. la médiatrice de [AC].

   b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

   c. la médiatrice de [AI].

   d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

   On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.

b. En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1,\ z_{\mathrm{B}} = 5$ et $z_{\mathrm{I}} = 3+\mathrm{i}$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A.
À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-5}{z-1}.$$

Le point M' est appelé l'image de M.

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I$'$ image de I.
Vérifier que I$'$ appartient à $(\mathscr{C})$.

2. **a.** Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $\mathrm{O}M' = \dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}$.

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a :
$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image M'.

1. Démontrer que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

2. On note (d) la droite symétrique de la droite $(\mathrm{A}M)$ par rapport à la tangente (T). (d) recoupe $(\mathscr{C})$ en N.

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.
Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\ \overrightarrow{\mathrm{A}N}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ démontrer que
$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{O}N}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$.

b. En déduire une construction de M'.

EXERCICE 5 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On note $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$.

1. a. Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $\left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.
3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $\left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?