Corrigé du baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

1. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$ donc la suite (v_n) est $\boxed{\text{géométrique}}$ de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$.

b. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or $v_n = u_n - 6$ donc $u_n = v_n + 6$ et on obtient bien $\boxed{u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6}$

c. $\frac{1}{3} \in]-1\,;\,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -5 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc on en déduit facilement que la suite (u_n) converge et que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6}$

a. Appliquons la formule de récurrence définissant (w_n) pour $n = 10$:
$10w_{10} = 11w_9 + 1$ donc $10w_{10} = 11 \times 19 + 1 = 210$ donc $\boxed{w_{10} = 21}$

b. On conjecture que la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $w_0 = 1$, autrement dit que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $w_n = 2n + 1$.

Démontrons-le par récurrence sur n : notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $w_n = 2n + 1$ ».

• *Initialisation* : $w_0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• *Hérédité* : soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.
On sait que $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$.
Or par hypothèse de récurrence, on sait que $w_n = 2n+1$ donc $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(2n+1) + 1 = 2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1)$. Or $n + 1 \neq 0$ donc on en déduit que $w_{n+1} = 2n + 3 = 2(n+1) + 1$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

• Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie, et si $\mathcal{P}_n$ est vraie $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie ; par le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir que, $\boxed{w_n = 2n + 1}$ d'où $\boxed{w_{2009} = 4019}$.

EXERCICE 2 **6 points**

1. a. D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc par passage à l'inverse, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x\mathrm{e}^{-x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x\mathrm{e}^{-x}) = \ln(1) = 0$ par continuité de la fonction ln en 1. On a donc bien $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

b. Posons $u(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x dans $[0\,;\,+\infty[$. La fonction u est clairement dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout x dans $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$u'(x) = 0 + 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On sait que $\mathrm{e}^{-x} > 0$. D'autre part, $x \geqslant 0$ donc $x\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $u(x) \geqslant 1 > 0$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$ donc d'après le cours, $f = \ln \circ\, u$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout x dans $[0\,;\,+\infty[$, on a :

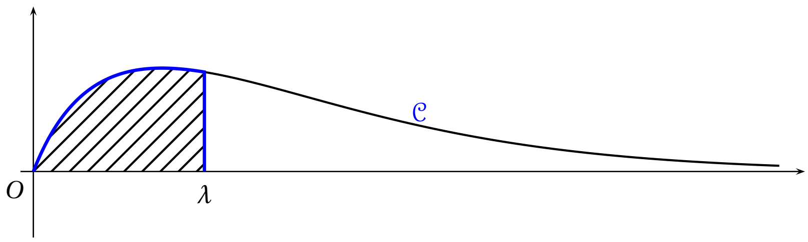
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{(1-x)\mathrm{e}^{-x}}{1+x\mathrm{e}^{-x}}$$

On sait que $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $u(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est bien du signe de $1 - x$.

c. Par suite, $f'(x) > 0$ si $x \in [0\,;\,1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]1\,;\,+\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ puis strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. a. Représentation graphique de $A(\lambda)$:

La fonction f est continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$ donc l'intégrale $A(\lambda)$ désigne l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$:



b. D'après la question **1. c.** on sait que f présente un maximum en $x = 1$ donc pour tout x dans $[0\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant f(1)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\lambda} f(1)\,\mathrm{d}x$, soit $\boxed{A(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)}$ (c'est évident géométriquement!)

3. a. On procède par intégration par parties :

$u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

$\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}dx = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} -\mathrm{e}^{-x}dx = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} + \int_0^{\lambda} \mathrm{e}^{-x}dx = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\lambda}$

donc finalement $\boxed{\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}dx = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1}$

b. On sait que pour tout x dans $[0;+\infty[$, $x\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc $\ln(1 + x\mathrm{e}^{-x}) \leqslant x\mathrm{e}^{-x}$. Par croissance de l'intégrale (les fonctions sont bien continues sur $[0\,;\,\lambda]$), on obtient :

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} \ln(1 + x\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1.$$

4. Pour $\lambda = 5$, une calculatrice donne $\lambda \times f(1) \simeq 1{,}57$ et $-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1 \simeq 0,96$. C'est donc la deuxième méthode qui donne le meilleur majorant dans le cas $\lambda = 5$:

$\boxed{A(\lambda) \leqslant 0,96}$

EXERCICE 3 **5 points**

1. $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}=\frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}$
$=\frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}$ $\square$

2. a. Les jetons sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Il y a $\binom{10}{2}$ manières de choisir 2 jetons parmi 10 et il y a $\binom{7}{2}$ manières de choisir 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs. Donc

$$p(A)=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}.$$

b. De même, 6 jetons portent des numéros impairs donc $p(B)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{3}$.

c. De même, 4 jetons blancs portent des numéros impairs donc $p(A\cap B)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2}{15}$. Ainsi, $p(A)\times p(B)=\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{45}$ alors que $p(A\cap B)=\frac{2}{15}=\frac{6}{45}$ donc $p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$ donc

$\boxed{\text{les évènements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}}$.

3. a. La variable aléatoire X peut valoir 0, 1 ou 2.
$p(X=0)=\frac{\binom{7}{0}\times\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{15}$,
$p(X=1)=\frac{\binom{7}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}$,
$p(X=2)=\frac{\binom{7}{2}\times\binom{3}{0}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}$. D'où :

k	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

b. $E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{7}{15}=\frac{7}{5}$: $\boxed{E(X)=\frac{7}{5}}$

EXERCICE 4 **5 points** (obligatoire)

1. a. $OM=|z|$ et $OM_1=\left|\frac{1}{z}\right|$ donc $OM\times OM_1=|z|\times\left|\frac{1}{z}\right|=\left|z\times\frac{1}{z}\right|=|1|=1$.
D'autre part, $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})=\arg(z)\quad[2\pi]$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1})=\arg(\frac{1}{z})=-\arg(z)\quad[2\pi]$ donc on a bien $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1})=-(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})\quad[2\pi]$.

b. cf. figure.

2. a. $z'=z_{M'}=\frac{z_M+z_{M_1}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ donc on a bien $\boxed{z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$

2. b. $z_{B'}=\frac{1}{2}\left(2\imath+\frac{1}{2\imath}\right)=\frac{1}{2}\left(2\imath-\frac{1}{2}\imath\right)=\frac{3}{4}\imath$ et de même on trouve $z_{C'}=-\frac{3}{4}\imath$.

b. cf. figure.

3. On a clairement les équivalences suivantes :

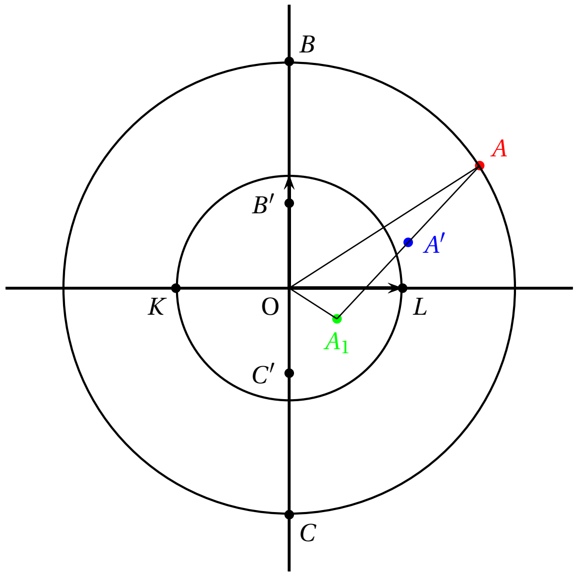
$$\begin{aligned} M=M' &\iff z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\\ &\iff 2z=z+\frac{1}{z}\\ &\iff z=\frac{1}{z}\\ &\iff z^2=1\\ &\iff z=1 \text{ ou } z=-1\end{aligned}$$

Notons (en devançant l'énoncé) K et L les points d'affixes respectives -1 et 1. Alors l'ensemble des points M tels que $M' = M$ est l'ensemble $\{K ; L\}$

4. Un point M d'affixe z appartenant au cercle de centre O et de rayon 1 vérifie $z = \text{e}^{\imath\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$z' = \frac{1}{2}\left(\text{e}^{\imath\theta} + \frac{1}{\text{e}^{\imath\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{e}^{\imath\theta} + \text{e}^{-\imath\theta}\right) = \frac{\text{e}^{\imath\theta} + \text{e}^{-\imath\theta}}{2} = \cos(\theta),\ \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

ce qui montre bien que M' appartient au segment $[KL]$.



EXERCICE 4 **5 points** (spécialité)

1. **a.** Le couple $(x,\ y) = (1,\ 1)$ est une solution particulière évidente. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation (E') : $8(x-1) = 5(y-1)$.
   • Soit $(x,\ y)$ une solution de (E). $5 \mid 5(y-1)$ donc $5 \mid 8(x-1)$. Or $5 \wedge 8 = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, $5 \mid x-1$. Soit donc k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x-1 = 5k$. Alors $\boxed{x = 1+5k}$. L'équation (E') donne alors $8(5k) = 5(y-1)$ donc $8k = y-1$ et $\boxed{y = 1+8k}$. Ainsi, $(x,\ y)$ est solution de (E), s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = 1+5k$ et $y = 1+8k$.
   • Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \{(1+5k\ ,\ 1+8k),\quad k \in \mathbb{Z}\}}$

   b. $8p-5q = (m-1)-(m-4) = 3$ donc $\boxed{(p,\ q) \text{ est une solution de } (E)}$. Par suite, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $p = 1+5k$, et donc $m = 8p+1 = 40k+9$ donc on a bien $\boxed{m \equiv 9 \pmod{40}}$

   c. Ce nombre est bien sûr $\boxed{m_0 = 2009}$, pour lequel $p_0 = 251$ et $q_0 = 401$.

2. **a.** $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ donc $2^{3k} = \left(2^3\right)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 7$: $\boxed{2^{3k} \equiv 1 \pmod 7}$

   b. Procédons à la division euclidienne de 2009 par 3 : $2009 = 669 \times 3 + 2$ donc $2^{2009} = \left(2^3\right)^{669} \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4 \pmod 7$ donc le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est $\boxed{4}$.

3. **a.** $10 \equiv 3 \pmod 7$ donc $10^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$ donc $\boxed{10^3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7}$.

   b. N est divisible par 7 ssi $N \equiv 0 \pmod 7$. Cette équation est équivalente à $a \times 10^3 + b \equiv 0 \pmod 7$, elle-même équivalente à $-a+b \equiv 0 \pmod 7$, soit $\boxed{a \equiv b \pmod 7}$
   $a = 1$: la condition $b \equiv 1 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 1$ ou $b = 8$.
   D'où $\boxed{N = 1001}$ et $\boxed{N = 1008}$.
   $a = 2$: la condition $b \equiv 2 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 2$ ou $b = 9$.
   D'où $\boxed{N = 2002}$ et $\boxed{N = 2009}$.
   $a = 3$: la condition $b \equiv 3 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 3$.
   D'où $\boxed{N = 3003}$.
   $a = 4$: la condition $b \equiv 4 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 4$.
   D'où $\boxed{N = 4004}$.
   $a = 5$: la condition $b \equiv 5 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 5$.
   D'où $\boxed{N = 5005}$.
   $a = 6$: la condition $b \equiv 6 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 6$.
   D'où $\boxed{N = 6006}$.
   $a = 7$: la condition $b \equiv 7 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 0$ ou $b = 7$.
   D'où $\boxed{N = 7000}$ et $\boxed{N = 7007}$.
   $a = 8$: la condition $b \equiv 8 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 1$ ou $b = 8$.
   D'où $\boxed{N = 8001}$ et $\boxed{N = 8008}$.
   $a = 9$: la condition $b \equiv 9 \pmod 7$ avec $b \in [\![0,9]\!]$ donne $b = 2$ ou $b = 9$.
   D'où $\boxed{N = 9002}$ et $\boxed{N = 9009}$.