Corrigé du baccalauréat S – Liban – 11 juin 2009

Exercice 1 — 3 points

Bien que cela ne soit pas demandé dans l'énoncé, les affirmations sont ici démontrées.

1. On a $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$, donc $p(A) = \dfrac{2}{5}$. De plus A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
On a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) = p(B) \times \left(1 - p(A)\right) + p(A)$

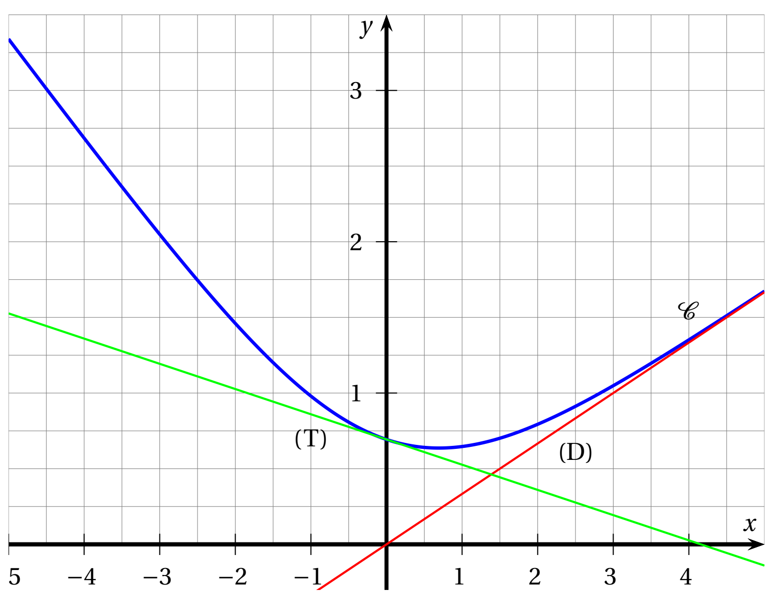
On en déduit : $p(B) = \dfrac{p(A \cup B) - p(A)}{1 - p(A)} = \dfrac{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \dfrac{2}{3}$. La réponse correcte est donc **b.**.

2. On a $p(X > 5) = 1 - p(X \leqslant 5) = 1 - \displaystyle\int_0^5 0,04\mathrm{e}^{-0,04x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0,04x}\right]_0^5 = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0,04\times 5} - \mathrm{e}^{0}\right) = \mathrm{e}^{-0,2} \approx 0,82$.
La bonne réponse est donc la proposition **d.**.

3. Soit C l'événement : « je sors mon chien » et P l'événement « il pleut ». P et $\overline{P}$ forment une partition de l'univers, donc j'utilise la formule des probabilités totales :
$p(C) = p_P(C) \times p(P) + p_{\overline{P}}(C) \times p(\overline{P}) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{28}{40} = \dfrac{7}{10}$

On en déduit $p_C\left(\overline{P}\right) = \dfrac{p\left(\overline{P} \cap C\right)}{p(C)} = \dfrac{p_{\overline{P}}(C) \times p(\overline{P})}{p(C)} = \dfrac{\frac{9}{10} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{27}{28}$. La bonne réponse est donc **d.**.

Exercice 2 — 8 points



Partie A

1. **a.** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   b. Comme $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = 0$, on en déduit que la droite (D) est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

   c. Comme $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \{-x\} > 0$, on a $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ et donc $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) > 0$, dont on déduit que l'asymptote (D) est en dessous de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $\mathbb{R}$.

   d. Soit x un réel. On a $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) + \dfrac{1}{3}x = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x}\right) + \dfrac{1}{3}x =$
   $\ln(\mathrm{e}^x + 1) - \ln(\mathrm{e}^x) + \dfrac{1}{3}x = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - x + \dfrac{1}{3}x$ soit $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \dfrac{2}{3}x$

   e. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x + 1 = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) = 0$ et comme par ailleurs,
   $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2. **a.** f est dérivable en tant que composée d'une fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,où la fonction ln est dérivable : cette composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire que l'on y ajoute pour obtenir $f(x)$ étant elle même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Sa dérivée est : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3\mathrm{e}^x}{3(\mathrm{e}^x + 1)} - \dfrac{2(\mathrm{e}^x + 1)}{3(\mathrm{e}^x + 1)} = \dfrac{3\mathrm{e}^x - 2(\mathrm{e}^x + 1)}{3(\mathrm{e}^x + 1)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3(\mathrm{e}^x + 1)}$.

   b. Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur, et $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff x > \ln(2)$. On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\ln 2]$ puis strictement croissante sur $[\ln 2\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. On a démontré dans la **partie A** que $f(x) - \dfrac{1}{3} = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) > 0$ pour tout x réel, donc l'aire entre $(\mathscr{C})$ et (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$, pour n entier naturel non nul, est $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

2. Si on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, alors $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n = 1 - \mathrm{e}^{-n}$
   Comme pour tout n on a $\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$, on a bien, pour tout n naturel $d_n \leqslant 1$
   La suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ est donc majorée. De plus :
   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n+1} - d_n &= \int_0^{n+1} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
   et l'intégrale entre n et $n+1$ d'une fonction positive (comme établi à la partie A) étant positive, on a pour tout n non nul $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$ donc $d_{n+1} \geqslant d_n$ et donc la suite est croissante.
   Une suite croissante et majorée étant nécessairement convergente, on en déduit que c'est le cas de $(d_n)_{n \geqslant 1}$.

Partie C

1. Le coefficient directeur de (T) est donné par $f'(0)$. C'est donc $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 - 2}{3(\mathrm{e}^0 + 1)} = \dfrac{-1}{6}$.

2. Soit x un réel non nul, considérons M et N les deux points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.
   L'ordonnée de M est donc $y_M = f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \dfrac{2}{3}x$.
   Pour calculer celle de N, on va utiliser l'autre forme de f : $y_N = f(-x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-(-x)}\right) + \dfrac{1}{3}(-x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \dfrac{1}{3}x$.
   Le coefficient directeur de (MN) est donc : $\dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \dfrac{\left[\ln(\mathrm{e}^x + 1) - \dfrac{2}{3}x\right] - \left[\ln(\mathrm{e}^x + 1) - \dfrac{1}{3}x\right]}{x - (-x)} =$

$$\frac{-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x}{2x}=\frac{-\frac{1}{3}x}{2x}=-\frac{1}{6}$$

Les droites (MN) et (T) ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

Exercice 3 4 points

1. **a.** Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$, car $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Le point J a pour coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$

   b. On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{DJ}:(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$; $\overrightarrow{BG}:(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{BI}:\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont clairement non colinéaires.
On a finalement $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG}=0-1+1=0$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI}=2\times\frac{-1}{2}+0+1=0$

   Le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan.

   c. On en déduit que le plan (BGI) a une équation cartésienne de la forme : $2x-y+z+d=0, d\in\mathbb{R}$. d étant tel que l'équation du plan est vérifiée par les coordonnées de B (car B est un point du plan).
Donc $2\times1-0+0+d=0$ soit $d=-2$, l'équation du plan est donc $2x-y+z-2=0$.

   d. On applique la formule du cours : la distance δ est $\delta=\frac{|2\times1-0+1-2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2. **a.** La droite (Δ) est dirigée par $\overrightarrow{DJ}$, de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et passant par F, de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, elle admet donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+2t\\y&=&-t\\z&=&1+t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$.

   b. Le plan de la face ADHE est le plan d'équation $x=0$, et le point de (Δ) d'abscisse 0 est le point de paramètre $-\frac{1}{2}$, ce point a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, c'est bien le centre de la face ADHE, car c'est le milieu du segment [AH] H étant le point de coordonnées $(0;1;1)$ et A l'origine du repère.
L'intersection de (Δ) et de la face ADHE est bien le centre de celle ci, le point K.

   c. Le point L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\right)$ est le point de (Δ) de paramètre $-\frac{5}{6}$.

   De plus, on a $2\times\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-2=\frac{4}{3}+\frac{4}{6}-2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-2=\frac{6}{3}-2=0$ les coordonnées de L sont donc sont solutions de l'équation de (BGI) le point L est aussi sur (BIG), c'est donc bien l'intersection de la droite et du plan.

   d. On a $\overrightarrow{LB}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;\ -\frac{5}{6}\right)$ et $\overrightarrow{GI}$ de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -1\ ;\ 0\right)$.

   Donc $\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{GI}=\frac{1}{3}\times\frac{-1}{2}+\frac{-1}{6}\times(-1)+\frac{-5}{6}\times0=\frac{-1}{6}+\frac{1}{6}=0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc (BL) et (GI) sont perpendiculaires (orthogonales et coplanaires) donc (BL) est la hauteur issue de B dans BIG.
$\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{IL}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\right)$.

   Donc $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{BG}=\frac{1}{6}\times0+\frac{1}{6}\times1+\frac{-1}{6}\times1=\frac{-1}{6}+\frac{1}{6}=0$ là encore les vecteurs sont orthogonaux, donc (IL) et (BI) sont perpendiculaires (orthogonales et coplanaires) donc (IL) est la hauteur issue de I dans BIG.
L est donc l'intersection de deux des hauteurs du triangle BIG, c'est bien l'orthocentre de BGI.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

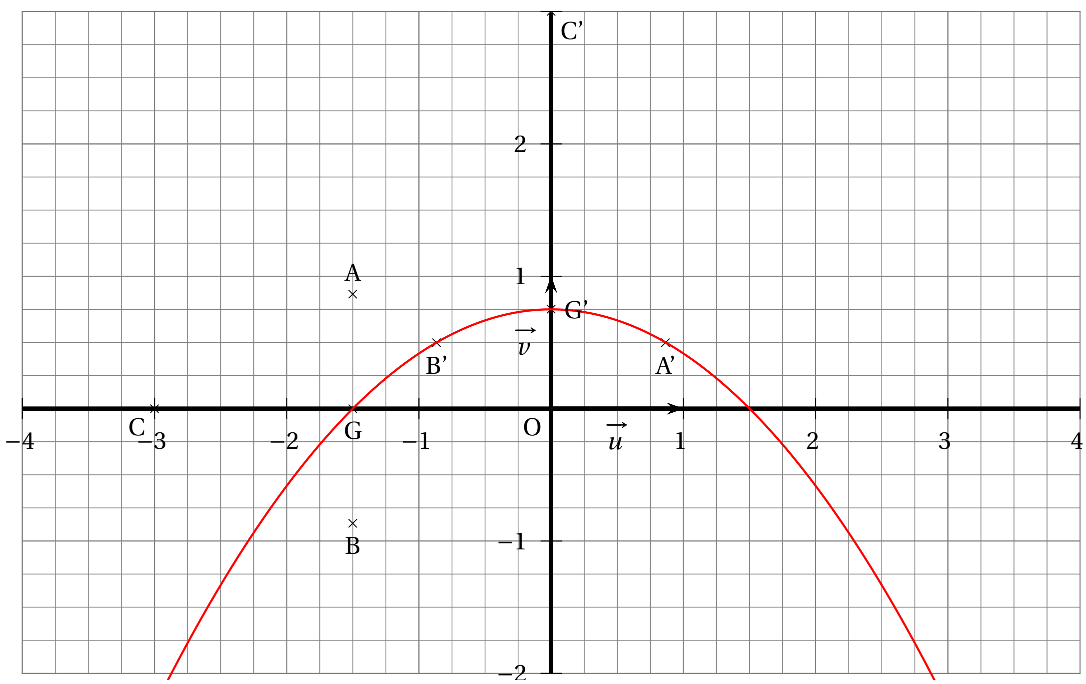
Partie A

1. $z_A = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$.

On a donc $z_B = \overline{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-5\pi}{6}}$

Enfin, $z_C = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

2. Voici la figure :



3. Posons $Z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-3 - \left(\frac{-3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{-3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3} \times \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

On a $|Z| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $|Z| = \dfrac{\text{BC}}{\text{BA}}$, donc BA = BC : le triangle est isocèle en B.

De plus $\arg(Z) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$, donc l'angle $\left(\overrightarrow{\text{BC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{BA}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$: le triangle BAC, isocèle en B a $\dfrac{\pi}{3}$ pour angle principal : le triangle est donc équilatéral.

Partie B

1. a. On a $\dfrac{1}{3}\mathrm{i} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, donc :

$z_{A'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_A^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$z_{B'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_B^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-5\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-7\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

$z_{C'} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_C^2 = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times (-3)^2 = 3\mathrm{e}\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$

b. Voir la figure.

c. A et B′ ont le même argument, donc O, A et B′ sont alignés (O est à l'extérieur du segment [AB′]).
B et A′ ont des arguments dont la différence est π, donc les points O, B et A′ sont alignés (O étant cette fois un point du segment [A′B])

d. $z_G = \dfrac{0 + z_A + z_B + z_C}{4} = \dfrac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 3}{4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.
Et donc : $z_{G'} = \dfrac{1}{3}i \times z_G^2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{9}{4}i = \dfrac{3}{4}i$

Le point G′ n'est pas l'isobarycentre des points O′ A′, B′ et C′, car O′ = O et $\dfrac{0 + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + 3i}{4} = \dfrac{4i}{4} = i \neq z_G$

2. Si M appartient à la droite (AB) alors son affixe z est de la forme $z = -\dfrac{3}{2} + ix, x \in \mathbb{R}$ et donc son image M' aura pour affixe $z' = \dfrac{1}{3}i \times \left(-\dfrac{3}{2} + ix\right)^2 = \dfrac{1}{3}i \times \left(\dfrac{9}{4} - 3ix - x^2\right) = x + i \times \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}x^2\right)$ On a donc $\Re(z') = x$ et $\Im(z') = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}x^2$, donc M' est bien sur la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$.
On peut préciser ce point : Si $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$, cela équivaut à dire que $n^3 - 2009$ est divisible par 10 000, et donc ce nombre se termine par quatre « 0 », donc n^3 est donc la somme d'un nombre se terminant par quatre 0 et de 2009 : ce nombre se termine donc bien par 2009.

Partie A

1. On a : $2009^2 = 4\,036\,081 = 252\,255 \times 16 + 1$, le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16 est donc 1.
2. On en déduit que $2\,009^2 \equiv 1 \pmod{16}$, et donc puisque les congruences sont compatibles avec les puissances :

$$\begin{array}{rcll} 2009^{8\,001} & \equiv & \left(2009^2\right)^{4\,000} \times 2009 & \pmod{16} \\ & \equiv & 1^{4\,000} \times 2009 & \pmod{16} \\ & \equiv & 1 \times 2009 & \pmod{16} \\ & \equiv & 2009 & \pmod{16} \end{array}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. **a.** On a $u_0 = 4\,036\,081 - 1 = 4\,036\,080 = 807\,216 \times 5$, u_0 est donc bien divisible par 5.

   b. Grâce au binôme de Newton, on sait : $(a+b)^5 = \displaystyle\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \times a^i \times b^{5-i} =$
   $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$.
   Avec $a = u_n$ et $b = 1$, alors on obtient : $(u_n + 1)^5 = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n^1 + 1$

   On a alors : $$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & (u_n + 1)^5 - 1 \\ & = & u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n \\ & = & u_n \times \left(u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5\right) \\ & = & u_n \times \left[u_n^4 + 5 \times \left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right] \end{array}$$

   c. Pour tout entier naturel n, soit P_n la propriété : u_n est divisible par 5^{n+1}.
   Initialisation : P_0, c'est à dire u_0 est divisible par 5 : ceci a été démontré au **B. 1. a.** : la propriété P_0 est donc vraie.

Hérédité : soit un naturel $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la propriété P_n est vraie, c'est à dire que u_n est divisible par 5^{n+1}, donc il existe un entier k tel que $u_n = 5^{n+1}k$.

D'après la question **B. 1. b.**, on a $u_{n+1} = u_n \times \left[u_n^4 + 5 \times \left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$. On va poser :

$l = u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1$, on a donc $l \in \mathbb{Z}$ et enfin, en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$u_{n+1} = 5^{n+1}k \times \left[\left(5^{n+1}k\right)^4 + 5l\right] = 5^{n+1}k \times \left[5^{4n+4}k^4 + 5l\right] = 5^{n+1}k \times \left[5^{4n+4}k^4 + 5l\right] = 5^{n+2}k \times \left[5^{4n+3}k^4 + l\right]$

$5^{4n+3}k^4 + l$ est une somme de produits et puissances de nombres entiers, donc ce nombre est entier et on en déduit que u_{n+1} est divisible par 5^{n+2} : c'est la propriété P_{n+1}.

Si P_n est vraie, P_{n+1} l'est également : la propriété est héréditaire.

Conclusion : P_0 est vraie et la propriété est héréditaire, donc la propriété est vraie pour tout n : pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. a. On a $u_0 = 2009^2 - 1$, donc $u_1 = \left(2009^2 - 1 + 1\right)^5 - 1 = \left(2009^2\right)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$.
Ensuite : $u_2 = \left(2009^{10} - 1 + 1\right)^5 - 1 = \left(2009^{10}\right)^5 - 1 = 2009^{50} - 1$.
Et enfin : $u_3 = \left(2009^{50} - 1 + 1\right)^5 - 1 = \left(2009^{50}\right)^5 - 1 = 2009^{250} - 1$.
On en déduit, comme u_3 est divisible par 5^4 (d'après la question précédente) que $2009^{250} - 1$ est divisible par $5^4 = 625$, ce qui donne : $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.

b.
$$\begin{aligned} 2009^{8001} &\equiv \left(\left(2009^{250}\right)^4\right)^8 \times 2009 \pmod{625} \\ &\equiv 1^{32} \times 2009 \pmod{625} \\ &\equiv 2009 \pmod{625} \end{aligned}$$

Partie C

1. La **partie A** a permis de montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 16, il existe donc un entier m tel que $2009^{8001} - 2009 = 16m$. La **partie B** a permis de montrer que $16m$ est divisible par 625.
Puisque $16 = 2^4$ et que $625 = 5^4$: ces deux nombres n'ont aucun facteur premier commun, ils sont donc premiers entre eux, on peut donc appliquer le théorème de Gauss, et on en déduit que 625 doit donc diviser m et il existe donc un entier m' tel que $m = 625m'$ et finalement
$2009^{8001} - 2009 = 16 \times 625m' = 10000m'$.
m' étant entier, on vient de démontrer que 10000 divise $2009^{8001} - 2009$.
2. On a donc $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{10000}$ et donc, comme $2009^{8001} = \left(2009^{2667}\right)^3$, on peut affirmer que 2009^{2667} est un entier dont le cube est un entier s'écrit sous forme décimale en se terminant par 2009