Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 16 juin 2011

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère une droite $\mathscr{D}$ munie d'un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathscr{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. **a.** Placer sur un dessin la droite $\mathscr{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
   On prendra 10 cm comme unité graphique.

   b. Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
   Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.

   c. Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.
2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 1

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i}, \quad b = 3\text{i}, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \text{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

Affirmation

Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$, la transformation f dont une écriture complexe est : $z' = \left(\dfrac{2\text{i}}{\sqrt{3} + \text{i}}\right)z$.

Affirmation

La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Question 3

On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3} + \text{i}\right)^{2011}$.
Affirmation
Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Question 4
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel t strictement positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ s'exprime par $P(X \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$.
Affirmation
Sachant que $X \geqslant 2$, la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2\,;\,3]$ est égale à $1 - \text{e}^{-\lambda}$.

Question 5
Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.
On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
Affirmation
La plus petite valeur de l'entier n, pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,9999, est égale à 13.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification complète sera valorisée.

Question 1
On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation
Les seuls couples solutions de (E) sont les couples $(22k - 2\,;\,-4k + 1)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2
On considère l'entier $N = 11^{2011}$.
Affirmation
L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3
On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i} \quad ; \quad b = 3\text{i} \quad ; \quad c = \left(1 - 2\sqrt{2}\right) + \text{i}\left(1 - \sqrt{2}\right).$$

Affirmation
Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 4
On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i} \quad ; \quad b = 2 - \text{i}.$$

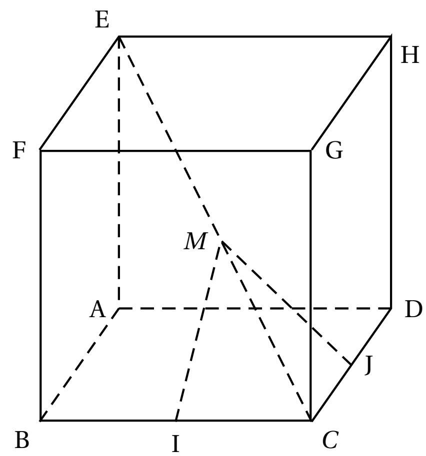
Soit f la similitude d'écriture complexe : $z' = \left(-\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\text{i}\right)\overline{z} + \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}\right)$.
Affirmation
La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface $\mathscr{S}$ dont une équation est : $z = 4xy$.
Affirmation
La section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. **a.** Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;\,1-t\,;\,t)$.

2. **a.** Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

   c. Exprimer IM^2 en fonction de t.

3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ est maximale.
   On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$.

   a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

   b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

   c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

   $$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

   d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$ soit maximale.

   e. Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. leur tracé est donné en annexe.

1. **Étude des fonctions f et g**
   a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   b. Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.
2. **Calcul d'intégrales**
   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :
$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et , si } n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$
   a. Calculer la valeur exacte de I_0.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :
$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$
   c. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.
3. **Calcul d'une aire plane**
   a. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   b. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
   En exprimant $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :
$$\mathscr{A} = 3 - \mathrm{e}.$$
4. **Étude de l'égalité de deux aires**
   Soit a un réel strictement supérieur à 1.
   On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
   On admet que $S(a)$ s'exprime par :
$$S(a) = 3 - \mathrm{e}^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right).$$
   L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $S(a)$ sont égales.
   a. Démontrer que l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ est équivalente à l'équation :
   $\mathrm{e}^a = a^2 + a + 1$.
   b. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

Annexe

(Courbes de l'exercice 4)