# ∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 7 septembre 2017 ∾

**EXERCICE 1** **7 points**
**Commun à tous les candidats**

*Les parties* A, B *et* C *sont indépendantes.*

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

**Partie A**

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée $p$.
Pour une journée donnée, on note :

- $E$ l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- $V$ l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

**1.** Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

**2.** Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

**3.** On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

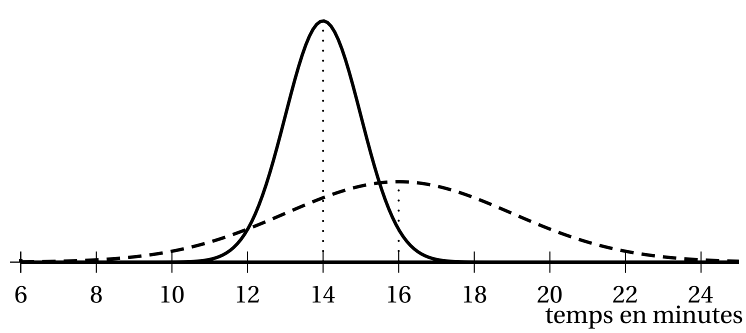
**a.** Calculer la valeur de $p$.

**b.** Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

**Partie B**

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire $T_V$ suivant une loi normale d'espérance $\mu_V$ et d'écart-type 1 minute.
Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire $T_C$ suivant une loi normale d'espérance $\mu_C$ et d'écart-type 3 minutes.

**1.** On nomme $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_V$ les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires $T_V$ et $T_C$ représentées dans la figure ci-dessous.
Déterminer, en justifiant votre réponse, $\mu_V$ et $\mu_C$.



2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à $10^{-4}$.
3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail ?

**Partie C**

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée $X$, suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, réel strictement positif.
La fonction de densité associée est donc la fonction $f$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

1. Soit $b$ un réel positif.
   Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que
   $$P(X \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}.$$
2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est $0,9$.
   **a.** En déduire la valeur exacte de $\lambda$.
   **b.** Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

**Exercice 2** **3 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit la suite de nombres complexes $(z_n)$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel $n$, on note $M_n$ le point d'affixe $z_n$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, les points O, $M_n$ et $M_{n+2}$ sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon $r$, où $r$ est un nombre réel positif, est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\mathrm{A}M \leqslant r$.
   Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points $M_n$ appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

**Exercice 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $[1~;~+\infty[$ telle que, pour tout nombre réel $x$ supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ sur $[1~;~+\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction $f$ sur $[1~;~+\infty[$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel $n$ et pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[1~;2]$, on a
   $$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel[1] $n$, on a
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 4** **5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

On considère les points A$(1~;1~;14)$, B$(0~;~1~;~8)$ et C$(-2~;~2~;~4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
   **b.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   **c.** Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x+8y-z=0$.
2. On considère la droite $\Delta$ des points $M$ dont les coordonnées $(x~;~y~;~z)$ sont données par
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t-3\\ y &=& t-\frac{1}{2},\quad t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 4t+2\end{array}\right.$$
   **a.** Donner un vecteur directeur de la droite $\Delta$.
   **b.** La droite $\Delta$ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

1. tout entier naturel non nul semble plus correct

**3.** Dans cette question, on considère l'ensemble $(E)$ des points $M$ dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^3+t \\ y & = & t+1, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 2t \end{array}\right.$$

Démontrer qu'il existe un unique point $M$ qui appartient à la fois à $(E)$ et à (ABC).
Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

**Exercice 4** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1.** Soit $p$ un entier relatif donné.
On s'intéresse dans cette question à l'équation $\left(E_p\right)$

$$3x + 4y = p$$

où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

**a.** Vérifier que le couple $(-p\ ;\ p)$ est une solution particulière de l'équation.

**b.** Démontrer que l'ensemble des solutions de $\left(E_p\right)$ est l'ensemble des couples de la forme

$$(-p + 4k\ ;\ p - 3k) \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$6x + 8y - z = 0.$$

**2.** Soit $M_0$ un point de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$ qui appartient au plan $\mathcal{P}$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

**a.** Démontrer que $z_0$ est pair.

**b.** On pose $z_0 = 2p$ où $p$ est un entier relatif.
Prouver que le couple $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ est solution de l'équation $\left(E_p\right)$.

**c.** En utilisant la question 1., déterminer l'ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ à coordonnées entières.

**3.** À tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on associe le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

**a.** Montrer que $6x' + 8y' - z' = 101(6x + 8y - z)$.

**b.** En déduire que si le point $M$ est un point du plan $\mathcal{P}$, alors le point $M'$ est aussi un point du plan $\mathcal{P}$.

**c.** Soit $\Delta$ la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par O.
Montrer que si le point $M$ appartient à $\Delta$, alors le point $M'$ appartient aussi à $\Delta$.