Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane
Septembre 2015

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **6 points**

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^2\mathrm{e}^{-2nx}$
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

a. $f_1'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-2x} + x^2 \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 2x\mathrm{e}^{-2x} - 2x^2\mathrm{e}^{-2x} = 2x\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$

b. Pour déterminer les variations de la fonction f_1, on étudie le signe de f_1' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc la fonction f_1 est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$, et elle est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

c. On calcule la limite de f_1 en ∞ :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty \\ \text{On pose } X = -2x \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$$

d. Pour tout réel x, $f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x} = x^2\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2 = 0$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$

2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.

F_1 est une primitive de f_1 donc :

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = F_1(1) - F_1(0) = \left(-\mathrm{e}^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) - \left(-\mathrm{e}^0\left(0 + 0 + \frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{5\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4}$$

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.

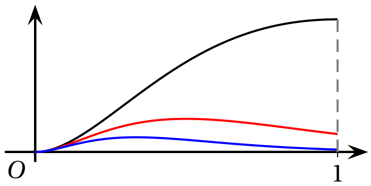
a. $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$

Sur $[0;1]$, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-2nx} > 0$ donc $f_n(x) \geqslant 0$

On en déduit que I_n représente, en unités d'aire, l'aire du domaine défini par l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ telles que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f_n(x)$.

b. Si on trace sur une calculatrice les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2 et f_3, on voit que sur $[0;1]$, $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > 0$.

Les intégrales entre 0 et 1 sont rangées dans le même ordre que les fonctions donc la suite (I_n) semble décroissante et semble tendre vers 0.



2. a. $f_{n+1}(x) = x^2\mathrm{e}^{-2(n+1)x} = x^2\mathrm{e}^{-2nx-2x} = x^2\mathrm{e}^{-2nx}\times\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}f_n(x)$

b. $x \in [0;1] \iff 0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -2 \leqslant -2x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{0} \implies \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$

Sur $[0;1]$ $\left.\begin{array}{l} f_n(x) \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1 \end{array}\right\} \implies \mathrm{e}^{-2x}f_n(x) \leqslant f_n(x) \iff f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

c. Sur $[0;1]$ et pour tout $n \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ ou autrement dit $I_{n+1} \leqslant I_n$.

La suite (I_n) est donc décroissante.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Sur $[0;1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ donc, en multipliant par $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, on obtient $0 \leqslant x^2\mathrm{e}^{-2nx} \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$ autrement dit : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$

b. $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2nx}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2n}$.

Donc $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2n}\right]_0^1 = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} + \dfrac{1}{2n}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0 \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0 \end{array}\right\} \implies \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} + \dfrac{1}{2n} = 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = 0$

On sait que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = 0$; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

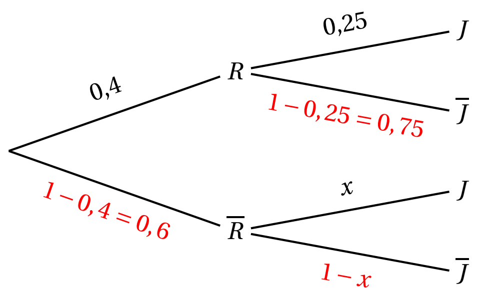
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J) = 0,2$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(J) = P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right) = P(R) \times P_R(J) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(J) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x = 0,1 + 0,6x$

$$\left.\begin{array}{lcl} P(J) &=& 0,2 \\ P(J) &=& 0,1+0,6x \end{array}\right\} \Longrightarrow 0,2 = 0,1 + 0,6x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité $P_J(R) = \dfrac{P(R \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2}$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1 - p = 0,8$.
On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

2. On cherche $P(X \geqslant 75)$ qui est égal à $1 - P(X \leqslant 74)$.
À la calculatrice on trouve $P(X \leqslant 74) \approx 0{,}0016$ ce qui donne $0{,}998$ pour la probabilité cherchée.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Un intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

sous les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
Or $p = 0{,}9$ et $n = 900 \geqslant 30$, donc $np = 810 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 90 \geqslant 5$
On peut déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe : $I = [0{,}8804\,;\, 0{,}9196]$

2. Dans l'échantillon, il y a 766 bouteilles présentant moins de 2 % de pulpe, donc la fréquence de bouteilles présentant moins de 2 % de pulpe est de $\dfrac{766}{900} \approx 0{,}851$.
Cette fréquence observée est en dehors de l'intervalle I, donc l'affirmation du fournisseur semble erronée.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 4 points

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1$

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 \iff \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -1 \iff \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-1}) \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1}$$
$$\iff u_{n+1} = \mathrm{e}^{-1}u_n.$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison e^{-1}.

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln(v_n)$.
On appelle $(\mathscr{P})$ la proposition suivante : si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.
Soit la suite définie pour tout naturel par $v_n = \dfrac{1}{n+1}$: elle est bien à termes positifs et elle est majorée par 1.
Or pour tout naturel n, $w_n = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 1 + \ln(n+1)$; cette suite n'est pas majorée. La proposition $(\mathscr{P})$ est fausse.

3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par $\begin{cases} z_0 &= 2+3\mathrm{i} \\ z_{n+1} &= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$

$$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n \Longrightarrow |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n\right| \iff |z_{n+1}| = \left|\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6}}{4}\right| \times |z_n|$$

$\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\text{i}\,\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right|^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{2}{16}+\dfrac{6}{16}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$ donc $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\text{i}\,\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Pour tout n, $|z_{n+1}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$ donc la suite $(|z_n|)$ est géométrique de raison $q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $|z_0|=|2+3\,\text{i}\,|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n, $|z_n|=|z_0|\times q^n=\sqrt{13}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

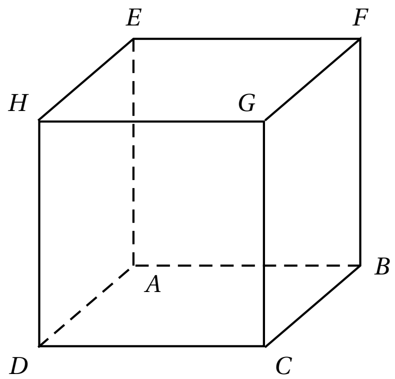
Tous les termes de la suite géométrique $(|z_n|)$ sont positifs; la raison de cette suite est strictement comprise entre 0 et 1 donc cette suite est décroissante et converge vers 0.
Il y aura donc un plus petit rang n_0 tel que $|z_{n_0}|\leqslant 10^{-20}$ et pour tout $n\geqslant n_0$ on aura $|z_n|\leqslant 10^{-20}$.
On cherche donc n tel que $|z_n|\leqslant 10^{-20}$ ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
\sqrt{13}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\leqslant 10^{-20} &\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\leqslant\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\\
&\iff \ln\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)\leqslant\ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right) && \text{croissance de la fonction ln}\\
&\iff n\times\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\leqslant\ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right) && \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff n\geqslant\frac{\ln\left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} && \text{car }\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln\left(\dfrac{10^{-20}}{\sqrt{13}}\right)}{\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}\approx 136{,}6$ donc pour $n\geqslant 137$, on a $|z_n|\leqslant 10^{-20}$.

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.
Donc $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$ et $E(0\,;0\,;1)$

1. **a.** La droite (DB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DB}\,(1\,;-1\,;0)$. Elle passe par le point D. C'est donc l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{DM}=s\,\overrightarrow{DB}$ où $s\in\mathbb{R}$.

Cela s'écrit $\left\{\begin{array}{lcl} x-0 &=& 1\times s\\ y-1 &=& (-1)\times s\\ z-0 &=& 0\times s\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& s\\ y &=& 1-s\\ z &=& 0\end{array}\right.$ où $s\in\mathbb{R}$

b. La droite (AG) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$ où $t\in\mathbb{R}$.
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc G a pour coordonnées $(1;1;1)$.
$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-0 &=& 1\times t\\ y-0 &=& 1\times t\\ z-0 &=& 1\times t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& t\end{array}\right.$ où $t\in\mathbb{R}$

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
Le point M a donc pour coordonnées $(s;1-s;0)$ où $s\in\mathbb{R}$, et le point N a pour coordonnées $(t;t;t)$ où $t\in\mathbb{R}$.
Alors $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(t-s;\ t-1+s;\ t)$.
La droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si d'une part les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux, et si d'autre part les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux.; autrement dit si $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG}=0$ et $\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB}=0$.
$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AG}=0 \iff (t-s)\times 1+(t-1+s)\times 1+t\times 1=0 \iff t-s+t-1+s+t=0 \iff 3t=1 \iff t=\dfrac{1}{3}$
$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB}=0 \iff (t-s)\times 1+(t-1+s)\times(-1)+t\times 0=0 \iff t-s-t+1-s=0 \iff 1=2s \iff s=\dfrac{1}{2}$
Les coordonnées de M sont donc $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$ et celles de N sont $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\ ;\ 1-s\ ;\ 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\ ;\ t\ ;\ t)$ un point de la droite (AG).

a. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(t-s;\ t-1+s;\ t)$ donc
$MN^2=(t-s)^2+(t-1+s)2+t^2=t^2-2ts+s^2+t^2+1+s^2-2t-2s+2ts+t^2=3t^2-2t+2s^2-2s+1$
$$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}=3\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}\right)+2\left(s^2-s+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{6}$$
$$=3t^2-2t+\frac{1}{3}+2s^2-2s+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=3t^2-2t+2s^2-2s+1$$
Donc $MN^2=3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}$

b. La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal; MN^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls qui sera minimale si chaque nombre est minimal.
Autrement dit pour que MN^2 soit minimal, il faut que $\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2$ et $\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2$ soient minimaux.
Les carrés seront minimaux s'ils sont nuls donc pour $t=\dfrac{1}{3}$ et $s=\dfrac{1}{2}$.
Dans ce cas, on a vu que la droite (MN) était la perpendiculaire commune aux deux droites (AG) et (BD).

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère l'équation $51x - 26y = 1$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. $51 = 3 \times 17$ et $26 = 2 \times 13$ donc les deux nombres 51 et 26 sont premiers entre eux; d'après le théorème de Bézout, on peut en déduire que l'équation $51x - 26y = 1$ admet des solutions en entiers relatifs.
2. **a.** Comme $2 \times 26 = 52 = 51 + 1$, on a : $(-1) \times 51 - (-2) \times 26 = 1$ donc le couple $(x_0\,;\,y_0) = (-1\,;\,-2)$ est solution de l'équation.

   b. On cherche un couple $(x\,;\,y)$ solution donc tel que $51x - 26y = 1$; or le couple $(x_0\,;\,y_0)$ est solution. On a donc :

$$\begin{array}{lcl} 51x & -\ 26y & = 1 \\ 51x_0 & -\ 26y_0 & = 1 \\ \hline 51(x - x_0) & -\ 26(y - y_0) & = 0 \end{array}$$

   $51(x - x_0) - 26(y - y_0) = 0 \iff 51(x - x_0) = 26(y - y_0)$

   51 divise $26(y - y_0)$; or 51 et 26 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 51 divise $y - y_0$. On peut donc écrire $y - y_0 = 51k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   $51(x - x_0) = 26(y - y_0)$ et $y - y_0 = 51k$ donc $51(x - x_0) = 26 \times 51k$ et donc $x - x_0 = 26k$.

   Si $(x\,;\,y)$ est solution, alors $x = x_0 + 26k = -1 + 26k$ et $y = y_0 + 51k = -2 + 51k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   réciproquement, si $x = -1 + 26k$ et $y = -2 + 51k$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors $51x - 26y = 1$ donc le couple $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $51x - 26y = 1$.

   L'ensemble des couples solutions de l'équation $51x - 26y = 1$ est donc l'ensemble des couples $(-1 + 26k\,;\,-2 + 51k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.

La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. La lettre N correspond à $x = 13$ donc $51x + 2 = 51 \times 13 + 2 = 665$. Comme $665 = 25 \times 26 + 15$, le reste de la division de 665 par 26 est 15 et $f(13) = 15$. Le nombre 15 correspond à la lettre P donc la lettre N est codée en P.
2. $51a \equiv 1\ [26]$ signifie que $51a$ s'écrit $1 + 26b$ avec $b \in \mathbb{Z}$.

   $51a = 1 + 26b \iff 51a - 26b = 1$ donc, d'après la partie A, $a = -1 + 26k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On cherche k de $\mathbb{Z}$ pour que $0 \leqslant a \leqslant 25$ donc on prend $k = 1$ ce qui donne $a = 25$.

   L'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$ est $a = 25$.

3. On suppose que la lettre correspondant à un entier x est codée par la lettre correspondant à un entier y ; alors y es le reste de la division de $51x+2$ par 26 ce qui signifie que

$y \equiv 51x+2\ [26]$ et $0 \leqslant y \leqslant 15$.

$a = 25$ donc $ay+2 = 25y+2$

$y \equiv 51x+2\ [26] \implies 25y \equiv 25 \times 51x + 25 \times 2\ [26]$

On sait que $51a \equiv 1\ [26]$ donc $51 \times 25 \equiv 1\ [26]$ et donc $25 \times 51x \equiv x\ [26]$

On peut donc dire que $25y \equiv x+50\ [26]$ donc que $25y+2 \equiv x+52\ [26]$.

Or $52 = 2 \times 26$ donc $52 \equiv 0\ [26]$. Donc $25y+2 \equiv x\ [26]$

On sait que x est le nombre correspondant à une lettre donc $0 \leqslant x \leqslant 25$.

$$\left.\begin{array}{l} 25y+2 \equiv x\ [26] \\ 0 \leqslant x \leqslant 25 \end{array}\right\} \implies x \text{ est le reste de la division de } 25y+2 \text{ par } 26$$

4. La lettre N correspond au nombre 13. On cherche donc le nombre x tel que $y = f(x)$ soit égal à 13.

Si $y = 13$, alors x est le reste de la division de $25y+2$ par 26.

$25 \times 13 + 2 = 327$ et $327 = 26 \times 12 + 15$ donc $x = 15$

La lettre qui est codée N correspond au nombre 15 donc c'est P.

5. Soit une lettre Ω correspondant au nombre x. Elle se code en une lettre Ω_1 correspondant au nombre x_1, reste de la division de $51x+2$ par 26, donc $x_1 \equiv 51x+2\ [26]$. Si on cherche à coder Ω_1, on aura la lettre Ω_2 correspondant au reste x_2 de la division de $51x_1+2$ par 26 donc $x_2 \equiv 51x_1+2\ [26]$.

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 & \equiv & 51x+2\ [26] \\ x_2 & \equiv & 51x_1+2\ [26] \end{array}\right\} \implies x_2 \equiv 51(51x+2)+2\ [26] \iff x_2 \equiv 2\,601x+104\ [26]$$

$2\,601 = 26 \times 100 + 1$ donc $2\,601 \equiv 1\ [26]$ et donc $2\,601x \equiv x\ [26]$

$104 = 26 \times 4$ donc $104 \equiv 0\ [26]$

Donc $x_2 \equiv 2\,601x+104\ [26] \iff x_2 \equiv x\ [26]$

Et comme x et x_2 sont tous les deux des restes dans la division par 26, $x_2 = x$.

Cela veut dire que si on applique deux fois la fonction de codage f à un nombre correspondant à une certaine lettre, on retrouve ce nombre : $f(f(x)) = x$.

Ce sera encore vrai si on applique un nombre pair de fois la fonction de codage.

Donc si on applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre correspondant à une certaine lettre, on obtient la lettre du départ.