EXPONENTIELLES

I Fonction exponentielle de base q

Exercice 01

Les lois de Moore sont des conjectures énoncées par Gordon Moore (un des trois fondateurs d'Intel).
En 1965, Moore postulait que la complexité des semiconducteurs utilisés dans les ordinateurs doublerait tous les ans. Cette conjecture est communément appelée 1$^{\text{ère}}$ loi de Moore.
En 1975, Moore modifia et précisa sa prédiction en affirmant que le nombre de transistors dans les microprocesseurs doublait tous les deux ans. Cette conjecture est communément appelée 2$^{\text{ème}}$ loi de Moore.

1°) On admet qu'en 1975 il y a 10 000 transistors dans un microprocesseur.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 2 \times u_n$

a) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 .
À quoi correspondent u_1 ; u_2 ; u_3 relativement à la 2$^{\text{ème}}$ loi de Moore ?

b) Justifier que la suite (u_n) est géométrique et déterminer u_n en fonction de n.

c) En 1989 le microprocesseur 80486 d'Intel comportait 1,16 million de transistors.
Cette valeur est-elle conforme à la 2$^{\text{ème}}$ loi de Moore ?

2°) a) Si on admet que le nombre de transistors double tous les deux ans, justifier que tous les ans ce nombre de transistors est mutiplié par $\sqrt{2}$.
Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du nombre de transistors chaque année ?

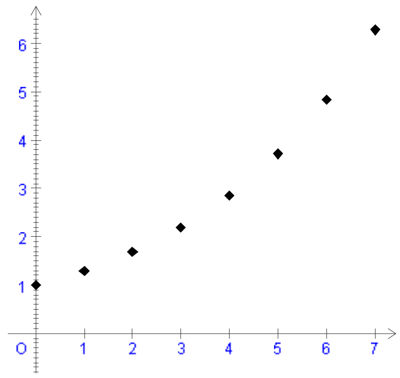
b) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 10\,000$ et pour tout entier n : $v_{n+1} = \sqrt{2} \times v_n$
Calculer v_1 ; v_2 ; v_3 ; v_4 (on arrondira à l'entier le plus proche).
À quoi correspondent v_1 ; v_2 ; v_3 ; v_4 relativement à la 2$^{\text{ème}}$ loi de Moore ?

c) En utilisant une calculatrice donner des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et de $2^{\frac{1}{2}}$.
Évaluer avec la calculatrice la différence $\sqrt{2} - 2^{\frac{1}{2}}$. Que peut-on penser ?

d) Justifier que la suite (v_n) est géométrique et déterminer v_n en fonction de n.
En déduire qu'avec la 2$^{\text{ème}}$ loi de Moore on peut estimer que le nombre de transistors dans un microprocesseur en 2000 peut s'exprimer sous la forme $10\,000 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{25}$. Évaluer ce nombre.
(Dans la réalité, en 2000, un Pentium 4 avait environ 42 millions de transistors)

Exercice 02

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$
et $u_{n+1} = 1{,}3 \times u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$



1°) Justifier que pour tout entier n on a $u_n = 1{,}3^n$

2°) La représentation graphique de la suite (u_n) est donnée ci-contre.
Tracer sur ce dessin la courbe d'une fonction continue reliant de la façon la plus harmonieuse tous les points de coordonnées $(n \,;\, u_n)$.

3°) En utilisant une calculatrice, définir une fonction f par l'expression $f(x) = 1{,}3^x$ et observer sa représentation graphique.
Comparer avec le graphique complété de la question précédente.

Définition

Soit q un réel strictement positif.
Il existe une fonction $x \mapsto q^x$ définie et dérivable sur IR telle que :
pour tous réels x et y on a $q^x \times q^y = q^{x+y}$
Cette fonction est appelée fonction exponentielle de base q.

Remarques

- On connaissait jusqu'à présent les puissances d'exposant entier.
  Par exemple $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$; $8^{-4} = \frac{1}{8^4} = \frac{1}{8 \times 8 \times 8 \times 8} = \frac{1}{4096}$
  La fonction exponentielle de base q généralise cette notion de puissance à un exposant réel.
  Une calculatrice donne ainsi $3^\pi \approx 31{,}544$; $5^{1,27} \approx 7{,}721$
- Pour tout réel q strictement positif on a $q^0 = 1$ et $q^1 = q$
- Pour tout réel q strictement positif et tout réel x on a $q^x > 0$

Exercice 03

En utilisant une calculatrice, donner des valeurs approchées de :
$5^{\sqrt{2}}$; $3{,}5^{1+\pi}$; $(1+\sqrt{2})^{0,1}$; $12^{-1,5}$; $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

Exercice 04

Soit q un réel strictement positif.
1°) Soit x un réel. En calculant $q^x \times q^{-x}$ justifier que $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$

2°) Soient x et y deux réels. Justifier que $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$

Propriétés

Soit q un réel strictement positif.

- Pour tout réel x on a $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$
- Pour tous réels x et y on a $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$
- Pour tous réels x et y on a $(q^x)^y = q^{x \times y}$

Remarque

On a $\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^2 = q^{\frac{1}{2} \times 2} = q^1 = q$; donc $q^{\frac{1}{2}}$ est le nombre réel positif dont le carré est égal à q ; c'est-à-dire $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$

Exercice 05

Écrire plus simplement :

$2^\pi \times 4$; $5^{2,5} \times 5^{-1,5}$; $\frac{7^{\frac{3}{2}}}{7}$; $\frac{3^{14}}{27}$; $\frac{2^7 \times 5^{12}}{100}$

Exercice 06

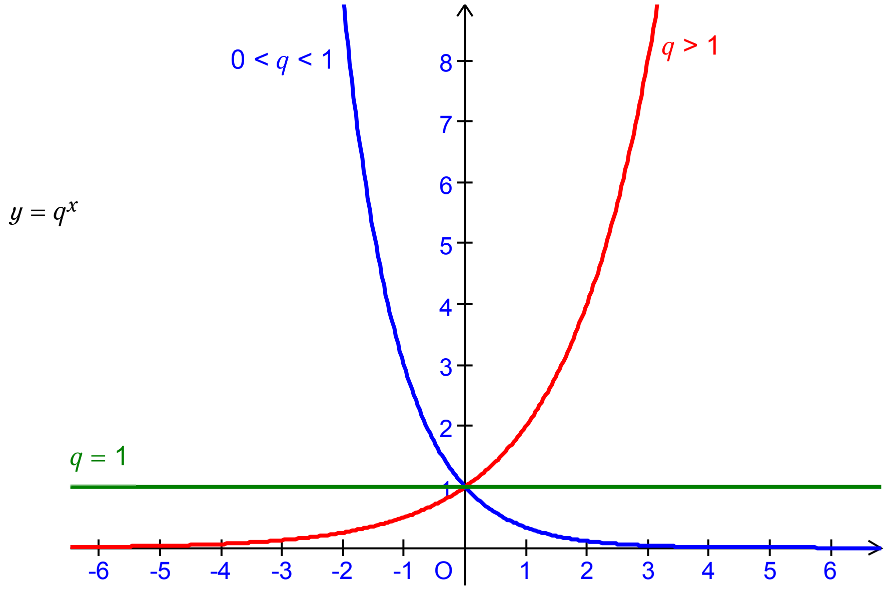
En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, tracer les courbes représentatives des fonctions
$x \mapsto 1{,}5^x$; $x \mapsto 2^x$; $x \mapsto 5^x$
Que peut-on dire des positions respectives de ces trois courbes ?

Exercice 07

En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, tracer les courbes représentatives des fonctions
$x \mapsto 0{,}1^x$; $x \mapsto 0{,}5^x$; $x \mapsto 0{,}8^x$; $x \mapsto 0{,}95^x$

Courbes représentatives

(voir animation)



Remarques

Si $q = 1$, pour tout réel x on a $q^x = 1^x = 1$, donc la fonction exponentielle de base 1 est représentée graphiquement par une droite (voir le dessin ci-dessus)

Exercice 08

En utilisant GeoGebra, créer un curseur q pour des valeurs allant de 0 à 5 et représenter la fonction exponentielle de base q.

1°) En faisant varier q, vérifier l'allure des différentes représentations graphiques, lorsque $0 < q < 1$, lorsque $q = 1$ et lorsque $q > 1$.

2°) Vérifier que toutes les courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le justifier.

3°) Donner l'équation de la droite D passant par A et de coefficient directeur 1.

4°) Tracer D sur le graphique et évaluer la valeur de q pour laquelle la droite D est tangente à la courbe.

II Fonction exponentielle (népérienne)

Définition

Parmi toutes les fonctions exponentielles, il en existe une et une seule dont le nombre dérivé en 0 vaut 1.
Cette fonction exponentielle est appelée fonction exponentielle népérienne (du nom de Neper mathématicien écossais 1550-1617)
On note e le nombre réel qui correspond à la base de cette fonction exponentielle.
La fonction exponentielle népérienne est donc définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = e^x$$

Remarques

- Le nombre e définissant la fonction exponentielle népérienne est un nombre réel irrationnel. $e \approx 2{,}719$
- Lorsque la base n'est pas précisée, la dénomination de « fonction exponentielle » désigne la fonction exponentielle de base e.
- Les calculatrices possèdent une touche e^x permettant d'utiliser la fonction exponentielle népérienne.
  La valeur approchée de e est en général obtenue avec une calculatrice en écrivant e^1.

Exercice 09

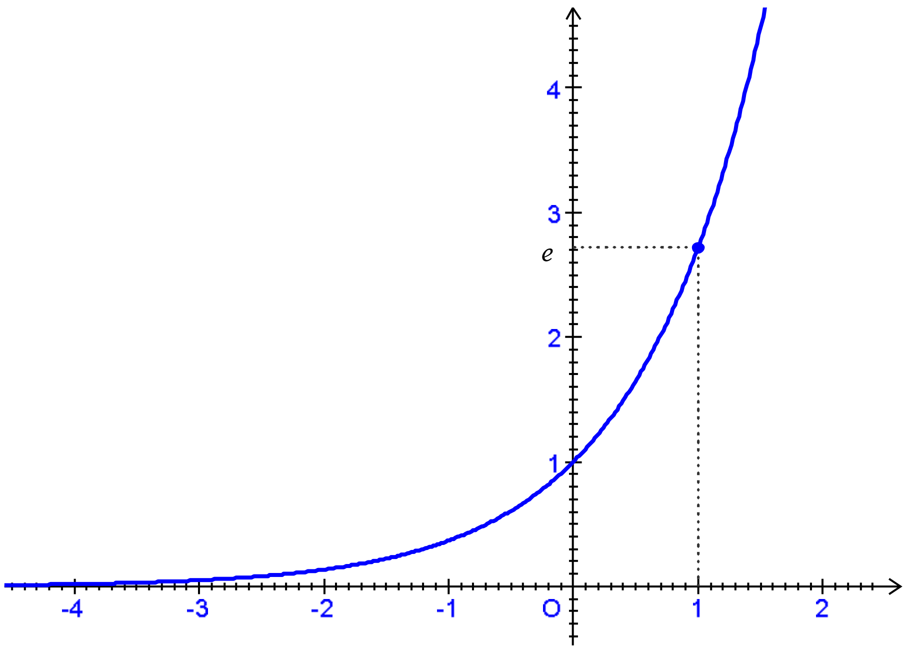
En utilisant la calculatrice, donner les valeurs approchées à 10^{-3} près de :

$$e^3 \quad ; \quad e^{-1{,}5} \quad ; \quad e^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad e^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad e^{-\frac{9}{4}} \quad ; \quad e^{\sqrt{2}} \quad ; \quad (e^{-1} + 1)^2 \quad ; \quad e^2 - 2e \quad ; \quad \frac{1}{e - 1}$$

Propriétés

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- Pour tout réel x, on a $e^x > 0$
- La fonction exponentielle est dérivable sur IR et sa dérivée est la fonction exponentielle elle-même.
  On a donc $(e^x)' = e^x$
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR.
- $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$; $0 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ et $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Courbe représentative



Remarques

- En utilisant une calculatrice on obtient les valeurs suivantes (au centième près) :

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
e^x	0,05	0,14	0,37	0,61	1	1,65	2,72	4,48	7,39

- La courbe de la fonction exponentielle a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x + 1$

Propriétés

a et b étant deux réels et n un entier, on a :

$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{na} = (e^a)^n$

Exercice 10

Simplifier les expressions suivantes :

$e^x \times e^{3x}$; $\dfrac{e^{2x}}{e^x}$; $(e^x + 1)(e^x - 1)$; $(e^{x+1})(e^{x-1})$; $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$

Exercice 11

Vérifier que pour tout réel x, on a : $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

Exercice 12

Démontrer que pour tout réel x : $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$

Exercice 13

On considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{2}{1 + e^{-t}}$

1°) Justifier que f est définie sur IR et démontrer que pour tout réel t on a : $f(t) = \dfrac{2e^{t}}{1 + e^{t}}$

2°) Résoudre $f(t) = 1$ et $f(t) \geqslant 1$.

Exercice 14

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^{x} - x$

1°) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2°) En déduire que g à un minimum que l'on déterminera.
3°) Justifier que pour tout réel x on a : $e^{x} \geqslant x + 1$
4°) En déduire que la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0. Illustrer ce résultat par un graphique.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x\,e^{x}$
On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2°) Donner le tableau de variations de f pour $x \in \left[-5\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

3°) Donner l'équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.

4°) Tracer $(\mathscr{C})$ pour $x \in \left[-5\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$. Tracer T et préciser la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse -1.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x} - 2$

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2°) Donner le tableau de variations de f pour $x \in \left[\dfrac{1}{4}\,;\,3\right]$.

3°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f pour $x \in \left[\dfrac{1}{4}\,;\,3\right]$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

Exercice 17

1°) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{2x}$.
En remarquant que $f(x) = (e^{x})^2$, justifier que $f'(x) = 2e^{2x}$ pour tout $x \in$ IR.
2°) On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^{3x}$.
En remarquant que $g(x) = e^{x} \times e^{2x}$, justifier que $g'(x) = 3\,e^{3x}$ pour tout $x \in$ IR.
3°) On considère la fonction h définie sur IR par $h(x) = e^{-x}$.
En remarquant que $h(x) = \dfrac{1}{e^{x}}$, justifier que $h'(x) = -\,e^{-x}$ pour tout $x \in$ IR.

Propriété

u étant une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction e^{u} qui à x associe $e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et on a : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$ ou encore $\left(e^{u}\right)' = u' \times e^{u}$

Remarque

En particulier, on a : $\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$; $\left(e^{3x}\right)' = 3e^{3x}$; $\left(e^{-x}\right)' = -\,e^{-x}$ (voir exercice 17)

Exercice 18

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :
$f(x) = e^{5x}$; $f(x) = e^{x^5}$; $f(x) = (e^{x})^5$; $f(x) = e^{-2x}$; $f(x) = 3e^{2x} - 5e^{x}$

Exercice 19

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$f(x) = xe^{-x}$; $f(x) = (2x + 1)e^{2x}$; $f(x) = e^{-x}(1 - x) + 1$; $f(x) = \dfrac{2}{8 + e^{-x}}$

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2°) Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

3°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ pour $x \in [-4 ; 4]$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^{-2x^2}$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Donner le tableau de variations de f pour $x \in [-5 ; 5]$.

2°) Vérifier que pour tout réel x on a $f(-x) = f(x)$.

En déduire que si $M(x ; y)$ est sur la courbe $(\mathscr{C})$, alors $M'(-x ; y)$ est aussi sur la courbe $(\mathscr{C})$.

Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C})$?

3°) En utilisant la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	10
$f(x)$									

4°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ pour $x \in [-5 ; 5]$. Préciser la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2°) Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

3°) Justifier que la courbe $(\mathscr{C})$ passe par l'origine O du repère.

Donner le coefficient directeur de la tangente T à $(\mathscr{C})$ en O.

4°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ pour $x \in [-5 ; 5]$ ainsi que sa tangente T.

Exercice 23

On considère la fonction f définie pour $x \in [-3 ; 3]$ par : $f(x) = e^{2x} - 2x$

1°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2°) Donner le tableau de variation de f.

3°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1cm

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur IR dont la courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-contre dans un repère orthonormé.

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

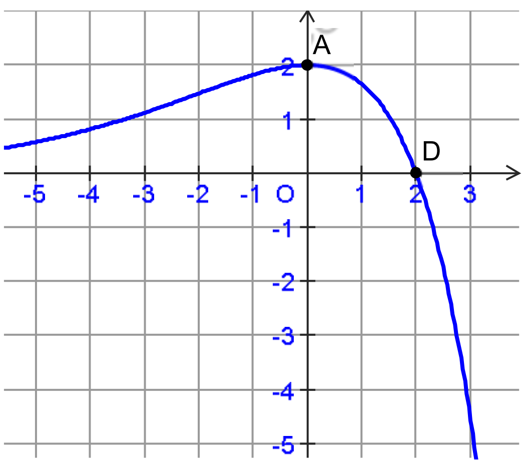
- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.

1°) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

2°) Calculer $f'(x)$.

3°) En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système $\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0 \end{cases}$

4°) Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.



Exercice 25

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par : $C(x) = \dfrac{e^{0,1x} + 20}{x}$

1°) Montrer que, pour tout $x \in [5 ; 60]$, $C'(x) = \dfrac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$

2°) On considère la fonction f définie sur $[5 ; 60]$ par $f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$

a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5 ; 60]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5 ; 60]$.

c) Donner un encadrement à l'unité de α.

d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5 ; 60]$.

3°) En déduire le tableau de variations de C sur $[5 ; 60]$.

4°) En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations :

a) $C(x) = 2$

b) $C(x) = 5$

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la **partie A**.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

Exercice 26

1°) On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$
où a et b sont deux réels que l'on se propose de déterminer.
On sait que f admet un maximum au point d'abscisse 4 et que le point A(0 ; 2) appartient à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm en abscisses et 4 cm en ordonnées.

a) Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0 ; +\infty[$.

b) Montrer que $a = 1$ et $b = -1$.

2°) Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$
Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations sur $[0 ; 9]$.

3°) a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$										

On arrondira les valeurs au centième.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4°) Étude économique
Les dépenses de téléphone, en milliers d'euros, de la société TOUPACHER sont consignées dans le tableau suivant : x_i désigne le rang de l'année et y_i désigne la dépense.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65	3,55	3,50

On recherche une fonction qui rende compte relativement correctement du phénomène.
On dira qu'une fonction f est acceptable si pour chaque valeur x_i on a : $-0,1 \leqslant f(x_i) - y_i \leqslant 0,1$

a) Représenter le nuage de points M_i $(x_i ; y_i)$ dans le repère précédent.

b) Montrer que la fonction f est acceptable.

c) Le responsable financier affirme que « si l'évolution des dépenses se poursuit selon ce modèle, on pourrait espérer retrouver une facture de téléphone inférieure à 3 000 euros ».
Êtes-vous d'accord avec cette affirmation ? Justifier.