

Chapitre 1

MATRICES

ACTIVITÉS : INTRODUCTION	144
I DÉFINITIONS	145
1 matrice	145
2 cas particuliers	145
3 égalité de deux matrices	145
II MATRICES ET OPÉRATIONS	146
1 transposée d'une matrice	146
2 addition de matrices	146
3 multiplication par un réel	146
4 produit de matrices	147
5 propriétés	148
III MATRICES CARRÉES	149
1 matrice identité	149
2 puissances d'une matrice carré	149
3 inverse d'une matrice carrée	150
4 application aux systèmes linéaires	150
5 Compléments (<i>hors programme</i>)	151
EXERCICES	154

ACTIVITÉ 1

Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B. Ces produits sont fabriqués sur trois sites de production S1, S2 et S3.

En septembre 2016 :

- le site S1 a fabriqué 50 milliers d'articles A et 70 milliers d'articles B ;
- le site S2 a fabriqué 40 milliers d'articles A et 90 milliers d'articles B ;
- le site S3 a fabriqué 120 milliers d'articles B ;

On représente la production du mois de septembre à l'aide de la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.

La production du mois d'octobre 2016 est donnée par la matrice $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Déterminer la matrice T_1 représentant la production totale des mois de septembre et octobre pour chaque site.
2. En novembre 2016, pour faire face à la demande, la direction décide d'augmenter de 10% la production du mois d'octobre de chaque article, dans chaque site.
Déterminer la matrice P_2 représentant la production de novembre 2016.

PARTIE B

1. Le coût de la main d'œuvre est le même pour chaque article fabriqué, mais il diffère selon le site de production. Pour S1 le coût de la main d'œuvre est de 25 € ; pour S2, il est de 28 € ; pour S3, il est de 30 €.
 - a) Calculer le coût de la main d'œuvre, en octobre 2016, pour la fabrication des articles A.
 - b) Représenter le coût de la main d'œuvre par un vecteur-colonne C .
 - c) En considérant les matrices P_1 et C , déterminer la matrice M_1 représentant le coût de la main d'œuvre pour la fabrication en octobre 2016 des articles A et des articles B.
2. Le prix de la matière première nécessaire à la fabrication de chaque article est de 18 € pour un article A et 22 € pour un article B.
 - a) Représenter le coût de la matière première par un vecteur-ligne L .
 - b) En considérant les matrices L et P_1 , déterminer la matrice A_1 représentant le montant des achats de matière première nécessaire à la fabrication des articles en octobre 2016 pour chacun des trois sites.

PARTIE C

1. 20% des articles A et 40 % des articles B sont destinés à l'exportation.

- a) Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

- b) Donner une interprétation du produit :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Le prix de vente d'un article A est de 56 € et celui d'un article B est de 62 €.

À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer le chiffre d'affaire réalisé par cette entreprise en octobre 2016, en supposant que toute la production a été vendue.

I DÉFINITIONS

1 MATRICE

On appelle matrice de dimension $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $a_{i,j}$ l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \left[\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{array} \right]$$

EXEMPLE

La matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 2×3 , le coefficient $a_{2,3}$ de la matrice P est $a_{2,3} = 120$.

2 CAS PARTICULIERS

MATRICE CARRÉE

Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une matrice carrée d'ordre n .

EXEMPLE

La matrice $M = \begin{pmatrix} -12 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3.

VECTEUR LIGNE

Une matrice formée d'une seule ligne et de n colonnes est une matrice ligne ou vecteur ligne.

EXEMPLE

La matrice $A = (60 \ 50 \ 0)$ est une matrice ligne de dimension 1×3 .

VECTEUR COLONNE

Une matrice formée de m lignes et d'une seule colonne est une matrice colonne ou vecteur colonne.

EXEMPLE

La matrice $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1 .

3 ÉGALITÉ DE DEUX MATRICES

Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, elles ont même dimension et que tous leurs éléments situés à la même place sont égaux.

EXEMPLE

Dire que les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$ sont égales signifie que

$$\begin{cases} 2-a=1 \\ b+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

II MATRICES ET OPÉRATIONS

1 TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE

La transposée tA (aussi notée A^T) d'une matrice A de dimension $m \times n$ est la matrice de dimension $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

EXEMPLE

La transposée de la matrice $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 2×3 est la matrice ${}^tP = \begin{pmatrix} 60 & 70 \\ 50 & 90 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$ de dimension 3×2 .

2 ADDITION DE MATRICES

La somme de deux matrices A et B de **même dimension** est la matrice notée $A+B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont deux matrices d'ordre $m \times n$ alors

$$A+B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

EXEMPLE

Soient les matrices $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$:

$$P_0 + P_1 = \begin{pmatrix} 50+60 & 40+50 & 0+0 \\ 70+70 & 90+90 & 120+120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 90 & 0 \\ 140 & 180 & 240 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS

Si A , B et C sont des matrices de même dimension alors :

- $A+B = B+A$.
- $A+(B+C) = (A+B)+C$

3 MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k .

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice d'ordre $m \times n$ alors pour tout réel k

$$kA = (ka_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

EXEMPLE

Si $P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$ alors :

$$1,1 \times P = \begin{pmatrix} 1,1 \times 60 & 1,1 \times 50 & 1,1 \times 0 \\ 1,1 \times 70 & 1,1 \times 90 & 1,1 \times 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 55 & 0 \\ 77 & 99 & 132 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux matrices de même dimension et k un réel on a :

$$k(A+B) = kA + kB$$

4 PRODUIT DE MATRICES

MULTIPLICATION D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE

Soient A une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et B une matrice colonne de dimension $n \times 1$.
Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est :

$$(a_1 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_n) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \times b_1 + \cdots + a_i \times b_i + \cdots + a_n \times b_n)$$

Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

EXEMPLE

$$(60 \quad 50 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = (60 \times 25 + 50 \times 28 + 0 \times 30) = (2900)$$

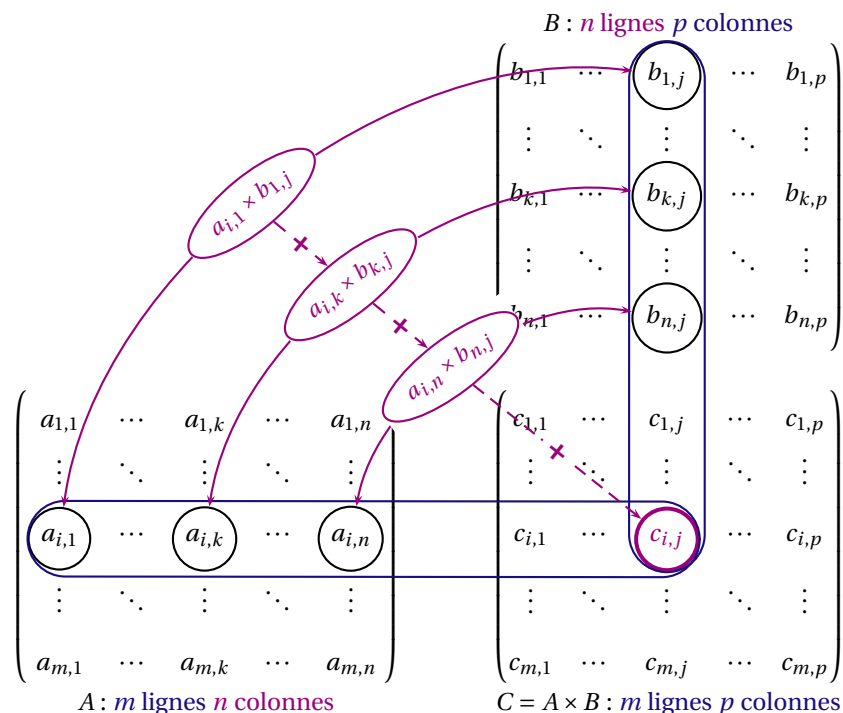
PRODUIT DE DEUX MATRICES

Si $A = (a_{i,k})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ est une matrice de dimension $m \times n$ et si $B = (b_{k,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de dimension $n \times p$, le

produit $C = A \times B = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une matrice de dimension $m \times p$.

Chaque élément $c_{i,j}$ de la matrice C est le produit de la matrice constituée de la i -ième ligne de la matrice A par la matrice constituée de la j -ième colonne de la matrice B ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$).

En pratique, il est commode de disposer les deux matrices de la façon suivante pour effectuer le produit :



EXEMPLE

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$

La matrice A est d'ordre 2×2 et la matrice B est d'ordre 2×3 . Le produit $C = A \times B$ est une matrice d'ordre 2×3 :

- L'élément $c_{1,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = [0,2 \times 60 + 0,4 \times 70]$
- L'élément $c_{1,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = [0,2 \times 50 + 0,4 \times 90]$
- L'élément $c_{1,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = [0,2 \times 0 + 0,4 \times 120]$
- L'élément $c_{2,1}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = [0,8 \times 60 + 0,6 \times 70]$
- L'élément $c_{2,2}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = [0,8 \times 50 + 0,6 \times 90]$
- L'élément $c_{2,3}$ de la matrice C s'obtient en effectuant le produit $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = [0,8 \times 0 + 0,6 \times 120]$

Soit en définitive :

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 46 & 48 \\ 90 & 94 & 72 \end{pmatrix}$$

REMARQUE

Si le nombre de colonnes de la matrice B est différent du nombre de lignes de la matrice A , le produit $B \times A$ n'est pas défini!

5 PROPRIÉTÉS

Soient A , B et C trois matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous sont définis :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.

REMARQUES

- En général $A \times B \neq B \times A$ il faut faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- $A \times C = B \times C$ ne signifie pas que $A = B$.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A \times B = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III MATRICES CARRÉES

1 MATRICE IDENTITÉ

MATRICE DIAGONALE

Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée matrice diagonale.

EXEMPLES

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

DÉFINITION

La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n , on la note I_n .

EXEMPLES

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPRIÉTÉ

Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$, où I_n est la matrice identité d'ordre n .

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2 PUISSANCES D'UNE MATRICE CARRÉE

Soit A une matrice carrée d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1.

La puissance p -ième de la matrice A est la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A .

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$$

Par convention $A^0 = I_n$.

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3 INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE

DÉFINITION

Une matrice carrée A d'ordre n est inversible, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n .
La matrice inverse de A si elle existe, est unique et est notée A^{-1}

EXEMPLE

La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est elle inversible?

Calculons a, b, c et d tel que $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. a, b, c et d sont les solutions éventuelles du système :

$$\begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 4b - 2d = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - c = \frac{1}{2} \\ -3a + c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = -2 \end{cases}$$

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

4 APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Un système linéaire à n équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre n , $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$.

Si la matrice A est inversible, alors le système admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

EXEMPLE

Soit le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors le système peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix}$ on en déduit que

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

Soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi, l'unique solution du système $x = -4$; $y = -3$ et $z = 1$.

5 COMPLÉMENTS

(hors programme)

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES À L'AIDE DE LA MATRICE AUGMENTÉE

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.

Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires :

- multiplier une équation par un réel non nul;
- permuter deux équations;
- ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Soit un système linéaire à n équations et n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est la matrice $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right)$

Les opérations élémentaires appliquées à un système d'équations linéaires correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée. Ces opérations sont les suivantes :

- multiplier une ligne par un réel non nul;
- permuter deux lignes;
- ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.

EXEMPLE

Utilisons les opérations élémentaires pour résoudre le système $\begin{cases} x - 3y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ -4x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$.

La matrice augmentée associée au système est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -6 & 1 \end{array} \right)$$

1. Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 1.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -14 \\ 0 & -9 & -2 & 25 \end{array} \right)$$

2. Obtenir 1 à la place du terme $a_{2,2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & -9 & -2 & 25 \end{array} \right)$$

3. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 2.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

4. Obtenir 1 à la place du terme $a_{3,3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow -5L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

5. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 3.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{8}{5}L_3 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Cette matrice augmentée correspond au système

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

On obtient l'unique solution du système $x = -4$; $y = -3$ et $z = 1$.

DÉTERMINER L'INVERSE D'UNE MATRICE

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Pour déterminer l'inverse, si elle existe, de la matrice A on applique la méthode précédente à la matrice augmentée $(A|I_n)$.

Si la matrice A est inversible, à l'aide des opérations élémentaires on transforme la matrice augmentée $(A|I_n)$ pour obtenir la matrice $(I_n|A^{-1})$

EXEMPLE

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. La matrice augmentée est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1. Permuter, s'il le faut, la première ligne avec une autre, pour que l'élément de la première ligne et de la première colonne soit non nul.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. Obtenir 1 à la place du terme $a_{1,1}$

$$L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3. Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,1}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 1.

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right)$$

4. Obtenir 1 à la place du terme $a_{2,2}$

$$L_2 \leftarrow -L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right)$$

5. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 2.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{3,2}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 3 et la ligne 2.

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \\ L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{aligned}$$

6. Obtenir 1 à la place du terme $a_{3,3}$

$$L_3 \leftarrow -2L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

7. Obtenir 0 à la place du terme $a_{1,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 1 et la ligne 3.
Obtenir 0 à la place du terme $a_{2,3}$ par une combinaison linéaire utilisant uniquement la ligne 2 et la ligne 3.

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \\ L_2 &\leftarrow L_2 + 3L_3 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 9 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.