Chapitre 4

GRAPHES PROBABILISTES

ACTIVITÉ 1

Étude du marché du travail de la population (15-65 ans) d'un pays fictif.

En 2016, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.
Les transitions entre l'emploi, le chômage et l'inactivité sur le marché du travail de ce pays les années précédentes sont données, en pourcentage, dans le tableau suivant :

		Année $n+1$		
		Emploi	**Chômage**	**Inactif**
Année n	**Emploi**	90	3	7
	Chômage	30	43	27
	Inactif	14	7	79

Ce tableau synthétise les changements de situation entre deux années consécutives : 90% des personnes qui ont un emploi une année donnée occupent un emploi l'année suivante.

On interroge au hasard une personne de la population (15-65 ans). Soit n un entier naturel, on note :

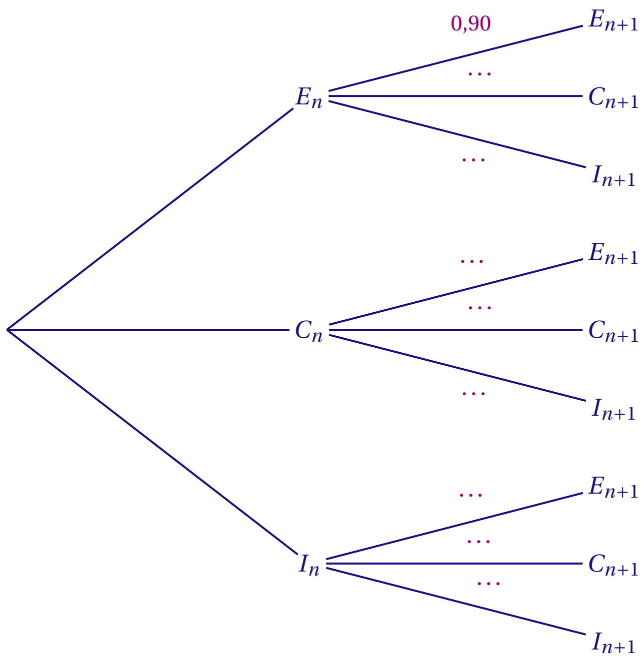
— E_n l'évènement « Cette personne occupe un emploi l'année $2016+n$ » ;

— C_n l'évènement « Cette personne est au chômage l'année $2016+n$ » ;

— I_n l'évènement « Cette personne est inactive l'année $2016+n$ ».

— e_n, c_n et i_n les probabilités respectives $P(E_n)$, $P(C_n)$ et $P(I_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré qui traduit l'évolution de la situation entre les années n et $n+1$



2. Calculer les probabilités e_1 et c_1. En déduire la probabilité i_1.
3. Calculer la probabilité c_2.
4. Exprimer les probabilités e_{n+1}, c_{n+1} et i_{n+1} en fonction des probabilités e_n, c_n et i_n.

I DÉFINITIONS

1 GRAPHE PROBABILISTE

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré (sans arêtes parallèles) dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

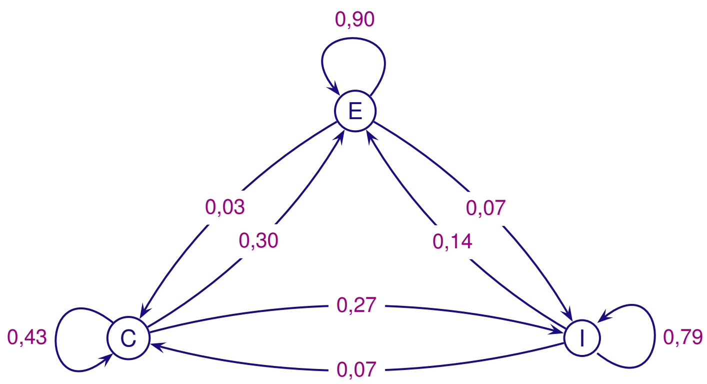
Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :

— les sommets du graphe sont les états possibles du système;

— le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité conditionnelle de la réalisation de l'évènement j à l'étape $n+1$ sachant que l'évènement i est réalisé à l'étape n.

EXEMPLE

Notons respectivement E, C et I les trois états emploi chômage et inactivité de l'activité 1. Le graphe probabiliste associé est :



2 MATRICE DE TRANSITION

La matrice de transition associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $M = \left(m_{i,j}\right)$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j si cette arête existe, et est égal à 0 sinon.

Tous les coefficients sont positifs ou nuls, et pour chaque ligne la somme des coefficients est égale à 1.
Cette matrice décrit le passage d'un état au suivant. Le coefficient $m_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n.

EXEMPLE

La matrice de transition M du graphe précédent est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}$$

3 ÉTAT PROBABILISTE

Un état probabiliste est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles.
Cette loi est représentée par une matrice ligne telle que la somme des termes est égale à 1.

EXEMPLE

Dans l'activité 1, en 2016, 69% de la population occupe un emploi, 6% de la population est au chômage.
Notons P_0 l'état probabiliste de l'année 2016 :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}06 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

II ÉVOLUTION D'UN ÉTAT AU COURS DU TEMPS

Étudions l'évolution au cours du temps du système à trois états (emploi, chômage, inactif) de l'activité 1 :
Soit $P_n = \begin{pmatrix} e_n & c_n & i_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du système l'année n.
D'après la formule des probabilités totales, l'année $n+1$:

$$e_{n+1} = e_n \times 0{,}90 + c_n \times 0{,}30 + i_n \times 0{,}14$$
$$c_{n+1} = e_n \times 0{,}03 + c_n \times 0{,}43 + i_n \times 0{,}27$$
$$i_{n+1} = e_n \times 0{,}14 + c_n \times 0{,}07 + i_n \times 0{,}79$$

L'état probabiliste du système l'année $n+1$ est :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} e_n \times 0{,}90 + c_n \times 0{,}30 + i_n \times 0{,}14 & e_n \times 0{,}03 + c_n \times 0{,}43 + i_n \times 0{,}27 & e_n \times 0{,}14 + c_n \times 0{,}07 + i_n \times 0{,}79 \end{pmatrix}$$

Soit $P_{n+1} = \begin{pmatrix} e_n & c_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}$

1 PROPOSTION

On considère un système qui peut se trouver dans k états $1, 2, \cdots, k$ avec une certaine probabilité et on étudie l'évolution de ce système au cours du temps.

Soit $P_n = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du système à l'instant n, M la matrice de transition et P_{n+1} l'état probabiliste du système à l'instant $n+1$. Alors, pour tout entier n, on a

$$P_{n+1} = P_n M$$

EXEMPLE

Avec les données de l'exemple précédent :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}06 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}674 & 0{,}064 & 0{,}262 \end{pmatrix}$$

En 2017 6,4% de la population était au chômage.

2 THÉORÈME

Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre p, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n, on a $P_n = P_0 \times M^n$

EXEMPLE

Calculons l'état probabiliste prévisible en 2020 :

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0{,}69 & 0{,}06 & 0{,}25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}^4 \approx \begin{pmatrix} 0{,}648 & 0{,}068 & 0{,}284 \end{pmatrix}$$

En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur les transitions dans le marché du travail, en 2020 environ 6,8% de la population (15-65 ans) de ce pays serait au chômage.

3 ÉTAT STABLE

Un état stable d'un graphe probabiliste de matrice de transition M est un état P tel que $P = PM$.

EXEMPLE

Déterminons l'état stable P du système emploi, chômage et inactivité sur le marché du travail.

Soit $P = \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix}$ l'état stable. Nous avons :

$$P = PM \iff \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0{,}30 & 0{,}43 & 0{,}27 \\ 0{,}14 & 0{,}07 & 0{,}79 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} e & c & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9e + 0{,}3c + 0{,}14i & 0{,}03e + 0{,}43c + 0{,}07i & 0{,}07e + 0{,}27c + 0{,}79i \end{pmatrix}$$

Or P est un état probabiliste d'où $e + c + i = 1$. Par conséquent e, c et i sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0{,}9e + 0{,}3c + 0{,}14i &= e \\ 0{,}03e + 0{,}43c + 0{,}07i &= c \\ 0{,}07e + 0{,}27c + 0{,}79i &= i \\ e + c + i &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}1e + 0{,}3c + 0{,}14i &= 0 \\ 0{,}03e - 0{,}57c + 0{,}07i &= 0 \\ 0{,}07e + 0{,}27c - 0{,}21i &= 0 \quad L_3 = -(L_1 + L_2) \\ e + c + i &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -0{,}1e + 0{,}3c + 0{,}14i &= 0 \\ 0{,}03e - 0{,}57c + 0{,}07i &= 0 \\ e + c + i &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0{,}4c + 0{,}24i &= 0{,}1 \\ 0{,}6c - 0{,}04i &= 0{,}03 \\ e + c + i &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} e + c + i &= 1 \\ 0{,}4c + 0{,}24i &= 0{,}1 \\ 0{,}8i &= 0{,}24 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} e &= 0{,}63 \\ c &= 0{,}07 \\ i &= 0{,}30 \end{cases}$$

L'état stable du système est $P = \begin{pmatrix} 0{,}63 & 0{,}07 & 0{,}30 \end{pmatrix}$.
En supposant qu'il n'y ait pas de changement sur le marché du travail, sur le long terme environ 7% de la population (15-65 ans) serait au chômage.

REMARQUE

Le taux de chômage est le rapport entre le chômage et la population active (emploi+chômage) soit :

$$\frac{0{,}07}{0{,}63 + 0{,}07} = 0{,}1$$

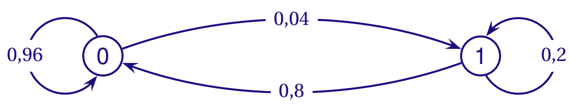
Sur le long terme, le taux du chômage se stabilise à 10%

4 PROPRIÉTÉ

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.

EXEMPLE

En salle des professeurs, il y a deux photocopieuses qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Chaque photocopieuse en état de marche a une probabilité égale à 0,2 de tomber en panne pendant la journée. Dans le cas où une photocopieuse tombe en panne pendant la journée, elle est réparée en fin de journée et se retrouve donc en état de marche le lendemain.
Supposons que l'on ne puisse pas réparer plus d'une photocopieuse chaque jour.
On s'intéresse au nombre de photocopieuses en panne en début de journée.
Le graphe probabiliste est un graphe à deux états 0 ou 1 :



dont la matrice de transition est

$$M=\begin{pmatrix}0{,}96 & 0{,}04\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

Soit $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ l'état stable du système. Nous avons :

$$\begin{aligned}P=PM &\iff \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}96 & 0{,}04\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}96a+0{,}8b & 0{,}04a+0{,}2b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Or P est un état probabiliste d'où $a+b=1$. Par conséquent a et b sont solutions du système :

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{rcl}0{,}96a+0{,}8b&=&a\\0{,}04a+0{,}2b&=&b\\a+b&=&1\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl}0{,}04a-0{,}8b&=&0\\0{,}04a-0{,}8b&=&0\\a+b&=&1\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}0{,}04a-0{,}8b&=&0\\a+b&=&1\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}a&=&\dfrac{20}{21}\\b&=&\dfrac{1}{21}\end{array}\right.\end{aligned}$$

L'état stable du système est $P=\begin{pmatrix}\dfrac{20}{21} & \dfrac{1}{21}\end{pmatrix}$. Quel que soit l'état initial, au bout d'un certain nombre jours, la probabilité que chaque jour aucune photocopieuse ne soit en panne est égale à $\dfrac{20}{21}$.