

Devoir Surveillé n°1

Terminale ES Spé

Matrices

Durée 1.5 heure - Coeff. 4

Noté sur 20 points

Exercice 1. Calcul de l'inverse d'une matrice

6 points

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier rapidement que la matrice A est inversible.
2. Déterminer par le calcul la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times B = Id_2$, et en déduire la matrice inverse de A .
3. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2. Application de l'exercice 1 : Résolution d'un système

6 points

Soit le système :

$$(S) : \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -3x - 2y = 2 \end{cases}$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice de l'exercice 1 et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que le système se traduit par l'équation matricielle $AX = B$.

2. Résoudre l'équation matricielle et déterminer le couple solution du système.
3. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Tournez la page svp

Exercice 3. D'après Bac**8 points**

Un constructeur d'ordinateurs portables fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.

- Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les ordinateurs
- et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	16 h	20 h	28 h
Modèle 2	12 h	12 h	20 h
Modèle 3	24 h	20 h	36 h

Tableau 2	
Poste 1	12 €/h
Poste 2	10 €/h
Poste 3	7 €/h

1. Soit H et C les deux matrices suivantes :

$$H = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 28 \\ 12 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 36 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. a. Donner la matrice produit :

$$P = H \times C$$

1. b. Que représentent les coefficients de la matrice P ?

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

- Modèle 1 : 488 €;
- Modèle 2 : 336 €;
- Modèle 3 : 616 €.

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a , b et c , permettant d'obtenir ces prix de revient.

2. a. Montrer que les réels a , b et c doivent vérifier l'égalité :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$$

2. b. Montrer rapidement (sans détailler tous les calculs) que la matrice inverse de la matrice H est :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

2. c. En déduire les réels a , b et c . Interpréter le résultat.

∞ Fin du devoir ∞

Bonus

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$.