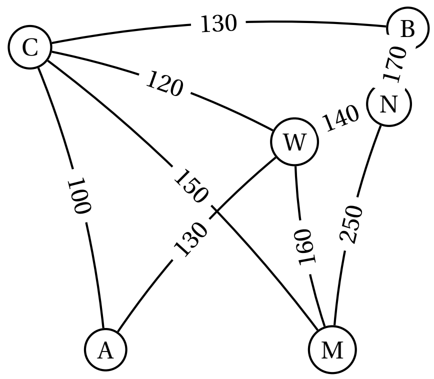
Devoir Surveillé n°2
Correction

Terminale ES Spé

Matrices

Durée 1.5 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. Un voyage — 10 points



Les nombres présents sur chacune des branches indiquent le tarif, en dollars, du vol en avion.

1.

1. a. Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

- Graphe Connexe

Définition 1 (Graphe connexe)

Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne contenant tous les sommets du graphe, la chaîne : $A-C-B-N-W-M$ donc le graphe est connexe.

- Application du Théorème.
Une chaîne eulérienne est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes : elle contient toutes les arêtes du graphe et chaque arête n'est décrite qu'une seule fois. De ce fait on cherche ici l'existence d'une telle chaîne.

Théorème 1 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

– Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
– Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Étudions le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	M	N	W
Degré	2	2	4	3	3	4

Donc deux sommets sont de degré impair , les sommets M et N. Par conséquent, d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne.
Il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois .

1. b. Donner un exemple d'un tel trajet.

Un tel trajet est : $M-C-A-W-N-B-C-W-M-N$.

2.

2. a. Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

> **Définition 2** (Matrice d'adjacence d'un graphe)
>
> Considérons un graphe G (orienté), d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes (orientées) allant du sommet i vers le sommet j.

On obtient donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. b. Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes. Combien y a-t-il de trajets possibles? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

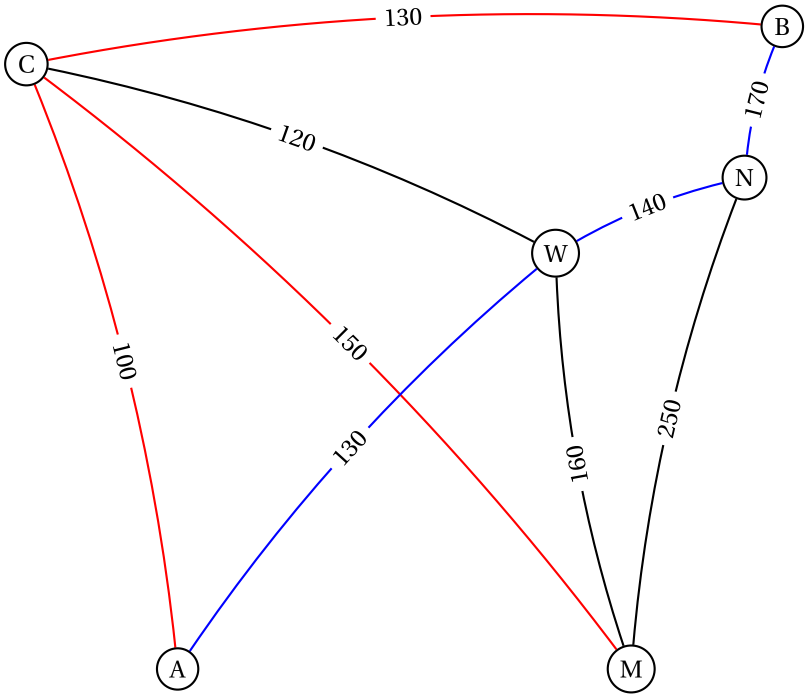
> **Propriété 1** (Matrice d'adjacence et nombre de chaînes)
>
> Si M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés et p désigne un entier naturel. Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

On calcule donc les puissances 2 et 3 de la matrice d'adjacence :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{2} & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

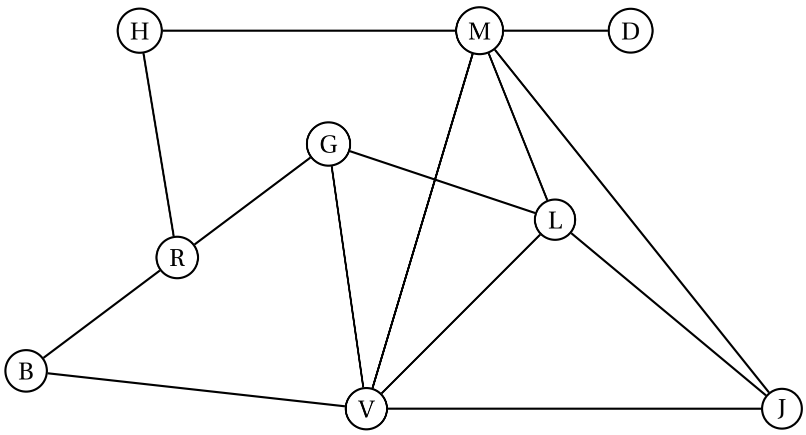
- Le coefficient (1 ; 2) de la matrice M^2 vaut 1 donc il y a donc 1 trajet pour aller d'Atlanta à Boston en deux liaisons.
- Le coefficient (1 ; 2) de la matrice M^3 vaut 2 donc il y a donc 2 trajets pour aller d'Atlanta à Boston en trois liaisons.
- Conclusion : 3 trajets permettent de relier Atlanta à Boston en trois liaison aériennes maximum :

$$A-C-B \text{ et } A-W-N-B \text{ et } A-W-C-B$$


C
B
N
W
A
M
130
170
120
140
100
150
130
160
250

Exercice 2. 10 points

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés. Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu.	H : Rocher Hvitserkur.	M : Lac de Myvatn.
D : Chute d'eau de Dettifoss.	J : Lagune glacière de Jôkulsarlôn.	R : Capitale Reykjavik.
G : Geyser de Geysir.	L : Massif du Landmannalaugar.	V : Ville de Vik.

1. *Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.*

1. a. Déterminer l'ordre du graphe.

Le nombre de sommets est l'ordre du graphe. Le graphe est ici composé de 9 sommets, donc l'ordre du graphe est 9.

1. b. Déterminer si le graphe est connexe.

> **Définition 3** (Graphe connexe)
>
> Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

Dans le graphe proposé, il existe une chaîne entre chacun des sommets puisque par exemple la chaîne $B - R - H - M - D - M - L - G - V - J$ contient tous les sommets de ce graphe non orienté, de ce fait le graphe est connexe.

1. c. Déterminer si le graphe est complet.

> **Définition 4** (Graphe complet)
>
> - Un *graphe simple* est un graphe sans boucle dont chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.
> - Un graphe simple est dit *complet* si tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire s'il existe toujours une (et une seule) arête entre deux sommets disjoints.

Bien que simple, le graphe n'est pas complet car par exemple les sommets D et J ne sont pas reliés par une arête.

2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

Emprunter toutes les routes une et une seule fois c'est chercher une chaîne eulérienne. Citons le théorème d'Euler :

Théorème 2 (Théorème d'Euler-Hierholzer - 1736)

- Un graphe connexe contient une *chaîne eulérienne* si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
- Un graphe connexe contient un *cycle eulérien* si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair).

Remarque : *Ce théorème qui porte le nom du génial mathématicien suisse Leonhard d'Euler (1707-1783) fut en fait publié par Carl Hierholzer en 1873, on l'appelle donc aussi le théorème d'Euler-Hierholzer.*

On a vu lors de la question (1.b.) que ce graphe était connexe. Les degré de chaque sommet sont :

Sommet	B	D	G	H	J	L	M	R	V
Degré	2	1	3	2	3	4	5	3	5

Le graphe possède 6 sommets de degré impair (D; G; J; M; R et V) donc d'après le théorème d'Euler-Hierholzer, ce graphe connexe n'admet pas de chaîne eulérienne. Sarah ne peut pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

3. a. Il manque certains coefficients de M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.

La partie manquante correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets M, R et V aux sommets B, D et G :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. b. Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.

Le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D est donnée par le coefficient (1 , 2) de la matrice M. or on a $M^4_{(1,2)} = 3$ on a donc 3 chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D . Il s'agit des chemins :

$$B - R - H - M - D \,;\; B - V - L - M - D \text{ et } B - V - J - M - D$$

Fin du devoir