

Devoir Surveillé n°1

Correction

Terminale ES Spé

Matrices

Durée 1.5 heure - Coeff. 4

Noté sur 20 points

Exercice 1. Calcul de l'inverse d'une matrice

7 points

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier rapidement que la matrice A est inversible.

Le déterminant (produit en croix) de la matrice A vaut : $4 \times (-2) - 3 \times (-3) = -8 + 9 = 1 \neq 0$.

Il est non nul donc la matrice est inversible.

2. Déterminer par le calcul la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times B = Id_2$, et en déduire la matrice inverse de A .

On cherche une matrice B telle que $AB = I_2$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} AB = I_2 &\iff \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 4a+3c & 4b+3d \\ -3a-2c & -3b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 4a+3c=1 \\ -3a-2c=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 4b+3d=0 \\ -3b-2d=1 \end{cases} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 4a+3c=1 \\ -3a-2c=0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 12a+9c=3 \\ -12a-8c=0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 12a+9c=3 \\ c=3 \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a=-2 \\ c=3 \end{array} \right\} \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} 4b+3d=0 \\ -3b-2d=1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 12b+9d=0 \\ -12b-8d=4 \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 12b+9d=0 \\ d=4 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} b=-3 \\ d=4 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

La matrice B est donc $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne l'inverse de A .

3. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2. Application de l'exercice 1 : Résolution d'un système

5 points

Soit le système :

$$(S) : \begin{cases} 4x+3y=1 \\ -3x-2y=2 \end{cases}$$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice de l'exercice 1 et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que le système se traduit par l'équation matricielle $AX = B$.

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x+3y=1 \\ -3x-2y=2 \end{cases}$$

2. Résoudre l'équation matricielle et déterminer le couple solution du système.

Puisque la matrice A est inversible, on peut aisément résoudre le système en utilisant le résultat de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff X = A^{-1} \times B \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -2-6 \\ 3+8 \end{pmatrix} \\ AX = B &\iff X = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le couple solution du système est donc : $(-8; 11)$

3. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.**Exercice 3. D'après Bac****8 points**

Un constructeur d'ordinateurs portables fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.

- Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les ordinateurs
- et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3
Modèle 1	16 h	20 h	28 h
Modèle 2	12 h	12 h	20 h
Modèle 3	24 h	20 h	36 h

Tableau 2	
Poste 1	12 €/h
Poste 2	10 €/h
Poste 3	7 €/h

1. Soit H et C les deux matrices suivantes :

$$H = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 28 \\ 12 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 36 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. a. [1.5 pt] Donner la matrice produit : $P = H \times C$

$$P = H \times C = \begin{pmatrix} 588 \\ 404 \\ 740 \end{pmatrix}$$

1. b. [1 pt] Que représentent les coefficients de la matrice P ?

La matrice C est celle de coûts horaires par poste et H celle des heures par poste et par modèle.

Les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent donc aux prix de revient des différents modèles d'ordinateurs.

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 488 € ; Modèle 2 : 336 € ; Modèle 3 : 616 €.

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a , b et c , permettant d'obtenir ces prix de revient.

2. a. [1.5 pt] Montrer que les réels a , b et c doivent vérifier l'égalité : $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$.

On a montré lors de la question **1b.** que les coefficients de la matrice $P = H \times C$ correspondent aux prix de revient des différents modèles de planches de surf.

Or ici la matrice de coûts horaires par poste devient $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et celle des prix de revient par modèle $P = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$.

La matrice H restant inchangée, les prix de revient par modèle sont déterminés par :

$$H \times C = P$$

Les réels a , b et c doivent être solutions du système :

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix}$$

2. b. [1.5 pt] Montrer rapidement (sans détailler tous les calculs) que la matrice inverse de la matrice H est :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}. \text{ En notant } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \text{ on obtient :}$$

$$H \times X = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 28 \\ 12 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 36 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

Donc $HX = Id$ et comme cela implique aussi que $XH = Id$, la matrice X est bien l'inverse de H .

2. c. [2 pts] En déduire les réels a , b et c . Interpréter le résultat.

Puisque la matrice H est inversible on multiplie les deux membres de l'égalité, à gauche, par H^{-1} :

$$\begin{aligned} H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix} \iff \underbrace{H^{-1} \times H}_{Id} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix} \\ &\iff Id \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 488 \\ 336 \\ 616 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les nouveaux coûts horaires sont pour chaque poste de :

Poste 1 : 10 € ; Poste 2 : 8 € ; Poste 3 : 6 €.

∞ Fin du devoir ∞

Bonus

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$.

$$T^2 = Id \iff \begin{pmatrix} a^2 - b & ab - 2b \\ 2 - a & 4 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$