Notion de fonction. Résolution graphique. Fonction affine.

Table des matières

1 Fonction numérique

La notion de fonction n'est pas toujours facile à saisir. Elle fait appel à de nombreux domaines des mathématiques : théorie des ensemble, équation, inéquation, géométrie, ...
Le mot fonction pour « l'homme de la rue » a plusieurs sens, le sens qui se rapproche le plus de la définition mathématique est la locution « être fonction de » qui signifie « dépendre de ». En mathématique une fonction fait appel à deux quantités dont l'une dépend de l'autre par une relation que l'on appelle « fonction ».

> *Une fonction est donc une relation qui existe entre deux quantités, telle que la variation de la première entraîne une variation correspondante de la seconde*
>
> NICOLAS CHUQUET mathématicien français(1445-1488)

Dans la théorie moderne une fonction est une relation entre deux ensembles A (ensemble de départ) et B (ensemble d'arrivé) qui à un élément x de l'ensemble de départ associe un unique élément y de l'ensemble d'arrivé. Cet élément y est donc « fonction de » x que l'on note alors $y = f(x)$. Cette relation particulière, car à un élement x, elle fait correspondre un et un seul élément y, est aussi appelé en mathématique « application ». Application et fonction sont donc deux synonymes, et leur emploi n'est alors qu'affaire de goût.

1.1 Définition

Définition 1 : On appelle **fonction numérique**, une relation qui à un réel x, appelé **variable**, associe un et un seul réel y. On note alors : $y = f(x)$.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{« } f \text{ est définie de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ »} \\ \text{« à } x \text{ on associe } y \text{ tel que y est égal à } f \text{ de } x \text{ »} \end{array}$$

On dit alors que :
- y est **l'image** de x par la fonction f
- x est **un antécédent** de y par la fonction f.

Remarque : Il y a une différence entre f qui est une relation et $f(x)$ qui est un réel. Par abus de langage, on confond parfois les deux, car une fonction est souvent définie par son image. Il est important cependant, dans un premier temps de ne pas confondre f et $f(x)$.

Exemples : La façon la plus simple de définir une fonction est de définir l'image de la variable x de façon explicite :

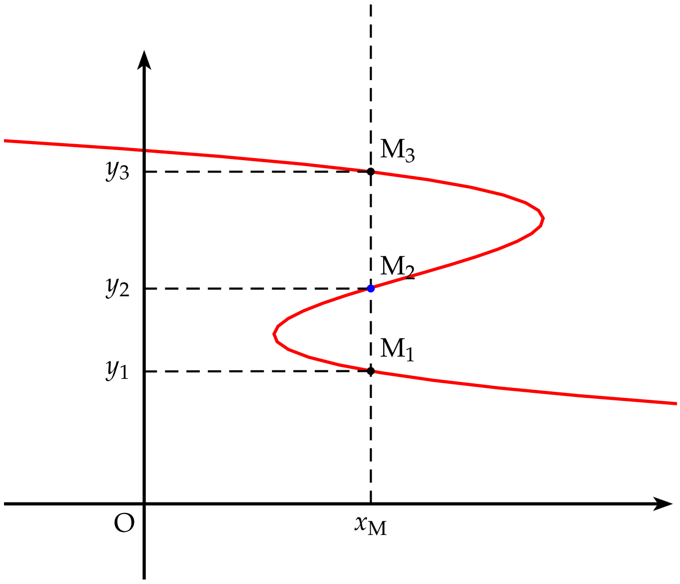
1) $f(x) = 3x + 4$ qui est une fonction affine

2) $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$ qui est une fonction du second degré

3) $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$ qui est une fonction homographique.

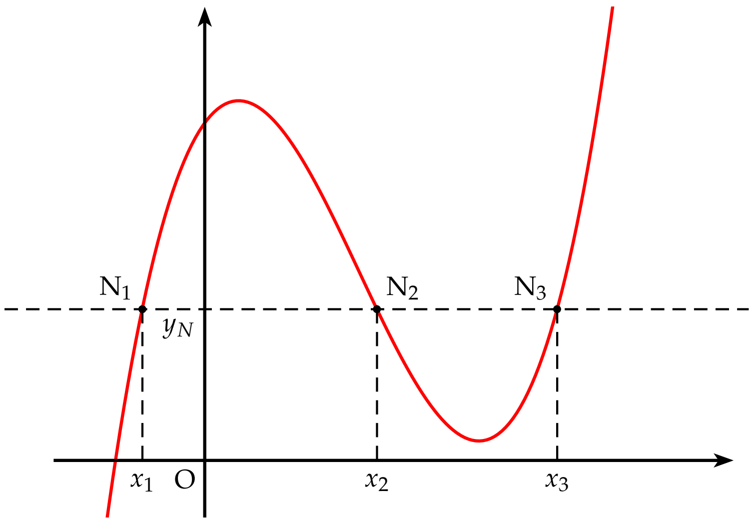
On remarquera que la fonction h n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car si $x = -3$ la fonction h n'a pas d'image. La fonction h est définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$

On peut définir une fonction par une courbe. Cependant toute les courbes ne représentent pas une fonction car une valeur de x ne peut avoir qu'une seule image y. Voici une courbe qui n'est pas une fonction. En effet un x donné est en relation avec 3 images :



courbe ne représentant pas une fonction : image non unique

Par contre pour une image y, il peut y avoir éventuellement plusieurs antécédents comme le montre la représentation de la fonction suivante :



Courbe représentant une fonction : image unique avec antécédents multiples

1.2 Comment calculer une image ?

Voici quelques exemples pour calculer une image. Reprenons les fonctions f, g et h définies précédemment :

$$f(x) = 3x + 4 \quad ; \quad g(x) = 3x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad h(x) = \frac{2x-5}{x+3}$$

- Image de 2 et -1 par la fonction f, on remplace x par les valeurs considérées :

$$f(2) = 3(2) + 4 = 6 + 4 = 10 \quad \text{on a donc} \quad f(2) = 10$$
$$f(-1) = 3(-1) + 4 = -3 + 4 = 1 \quad \text{on a donc} \quad f(-1) = 1$$

- Images de 4 et -2 par la fonction g.

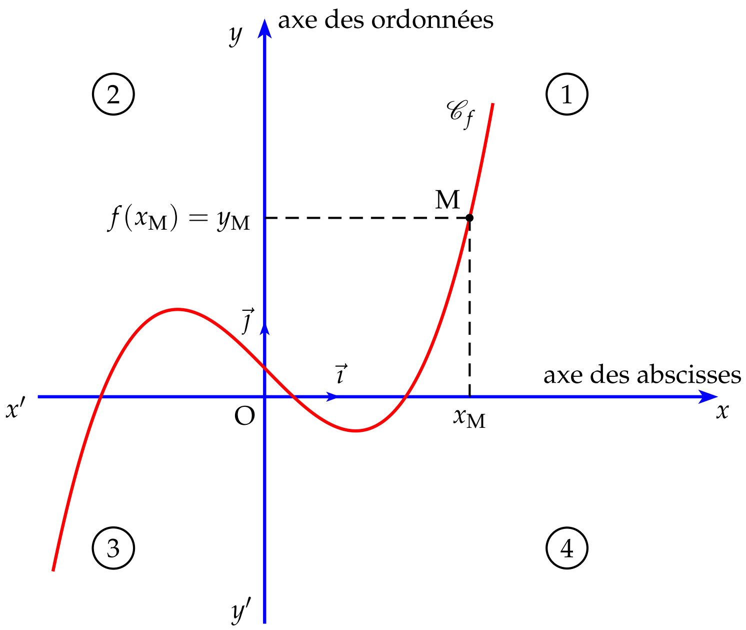
$$g(4) = 3(4)^2 + 2(4) - 3 = 3(16) + 8 - 3 = 53 \quad \text{on a donc} \quad g(4) = 53$$
$$g(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 3 = 3(4) - 4 - 3 = 5 \quad \text{on a donc} \quad g(-2) = 5$$

- Images de 3 et 0 par la fonction h

$$h(3) = \frac{2(3) - 5}{3 + 3} = \frac{6 - 5}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{on a donc} \quad h(3) = \frac{1}{6}$$
$$h(0) = \frac{2(0) - 5}{0 + 3} = \frac{-5}{3} \quad \text{on a donc} \quad h(0) = \frac{-5}{3}$$

1.3 Représentation graphique

Définition 2 : La représentation graphique d'une fonction est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ lorsque x varie sur $\mathbb{R}$.
Cette représentation s'appelle la courbe représentative de la fonction f notée $\mathscr{C}_f$



- L'axe horizontal $(x'Ox)$ s'appelle l'axe des **abscisses** [1]

1. Ce mot est emprunté au latin moderne abscissa (*linea*) qui signifie "ligne coupée" du latin *abscissus*, participe passé de *abscidere* (i.e. "couper"), de *ab* (à) et de *caedere* (ciseau). Il semblerait que ce soit Leibniz qui, le premier, en 1692, introduisit ce mot (ainsi que les 2 autres mais sur ce point, les avis divergent puisque certains dictionnaires étymologiques attribuent la première utilisation de "ordonnée" à B. Pascal.). Newton utilise abscisse en 1686.

- L'axe vertical $y'Oy$ s'appelle l'axe des **ordonnées** [2]

Nous travaillerons dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- **orthonormal** [3] : Deux axes de même unité perpendiculaires. Ce repère est utilisé lorsque x et y ont le même ordre de grandeur.
- **orthogonal** [4] : Deux axes perpendiculaires ayant des unités différentes sur les deux axes. Ce repère est utilisé lorsque x et y ont des ordres de grandeur différent. C'est souvent le cas dans des cas concrets.

Le repère est partagé en 4 zones : les cadrans 1, 2, 3, 4 sont indiqués sur le repère ci-dessus.

Pour déterminer un point de la courbe, il faut donc connaître une image. Pour tracer la courbe, un ordinateur ou une calculatrice graphique calcule un grand nombre d'images. Il relie ensuite les points en les *lissant*. Cependant si la variation de la fonction est très grande, il peut parfois donner une image de la courbe erronée. De plus, il trace la courbe dans un système d'unités qui lui permet de placer tous les points mais qui peut entraîner une mauvaise vision de la courbe. Il est donc nécessaire d'étudier la courbe pour en connaître les propriétés et les endroits remarquables.

Exemples : Reprenons les exemples de fonctions :

$$f(x) = 3x + 4 \quad ; \quad g(x) = 3x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad h(x) = \frac{2x-3}{x+3}$$

- $f(2) = 10$ et $f(-1) = 1$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par les points $(2\,;\,10)$ et $(-1\,;\,1)$.
- $g(4) = 53$ et $g(-2) = 5$ donc $\mathscr{C}_g$ passe par les points $(4\,;\,53)$ et $(-2;\,5)$.
- $h(3) = \dfrac{1}{6}$ et $h(0) = -\dfrac{5}{3}$ donc $\mathscr{C}_h$ passe par les points $\left(3\,;\,\dfrac{1}{6}\right)$ et $\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\right)$.

Remarque : La représentation graphique d'une fonction est la traduction en géométrie de la relation algébrique qu'est une fonction. Cette représentation permet de visualiser cette relation et permet ainsi d'avoir une compréhension plus intuitive de la notion de fonction. C'est aussi une autre façon de définir une fonction. Il faut cependant faire la différence entre fonction f et sa représentation $\mathscr{C}_f$.
La branche mathématique qui traite des fonctions s'appelle l'**analyse**.

2 Résolution graphique

Le but de ce paragraphe est de faire un inventaire des réponses que peut donner une représentation d'une fonction : variation et extremum, résolution d'équations ou d'inéquation, signe d'une fonction . . .

2. Ordonnée est attesté en 1639 pour désigner la coordonnée verticale servant à définir la position d'un point. Peut-être parce que la droite était déjà perçue comme un ensemble ordonné. Ordonnée semblerait être issue d'un texte de Descartes qui parlait de droites "menées d'une manière ordonnée" ainsi que de "lignes droites appliquées par ordre" (ordinatim applicatae) depuis la "ligne coupée" (linea abscissa, c'est-à-dire l'axe des abscisses). Le mot ordonnée est utilisé par Pascal en 1658.

3. Normal : du latin *norma*, règle, équerre en prenant le sens d'équerre.En toute logique, le mot *orthonormal* est donc un pléonasme (et incorrect puisqu'un mélange d'une racine grecque et d'une racine latine). Il vaudrait mieux parler d'un repère *orthonormé*.

4. Orthogonal : du grec ortho, droit et gonia, angle.

Ce sera aussi l'occasion de définir mathématiquement les différents termes utilisés avec les fonctions.
Enfin cela permet de faire un lien avec les deux chapitres précédents : équation et inéquation dans $\mathbb{R}$ que nous avons traité algébriquement et qui trouve ici un autre éclairage avec une résolution graphique.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,2,5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

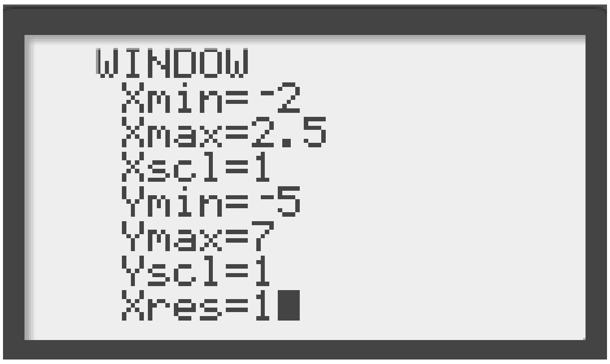
Toute la suite de ce paragraphe on fera référence à cette fonction

2.1 Tracer la fonction sur une calculette

- On rentre une fonction sur la Ti82 stats grâce à la touche f(x)
  On écrit la fonction Y_1 avec la touche x,t,θ,n pour la variable X. On valide à la fin avec la touche entrer

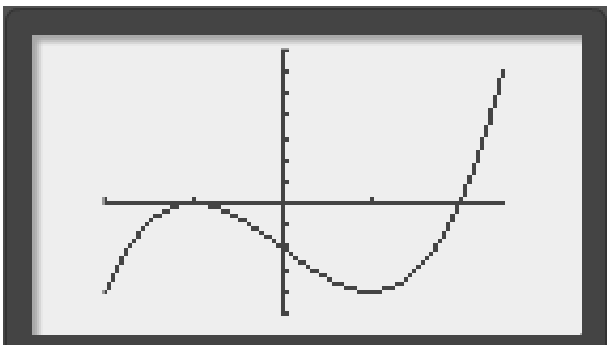
$$Y_1 = X^{\wedge}3 - 3X - 2$$

- On règle ensuite la fenêtre avec la touche fenêtre. On valide les valeurs avec la touche entrer

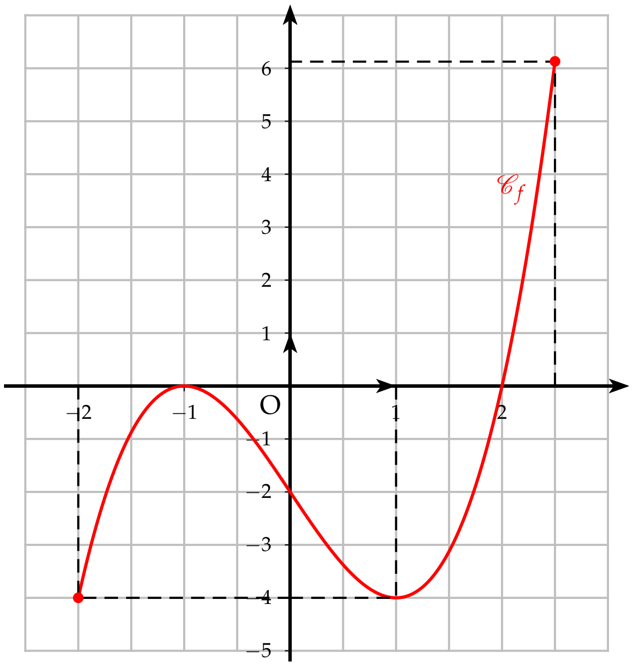


⚠ Pour rentrer -5 utiliser la touche : (-)

- On appuie sur la touche graphe et l'on obtient :



Pour une meilleur lecture voici la courbe $\mathscr{C}_f$:

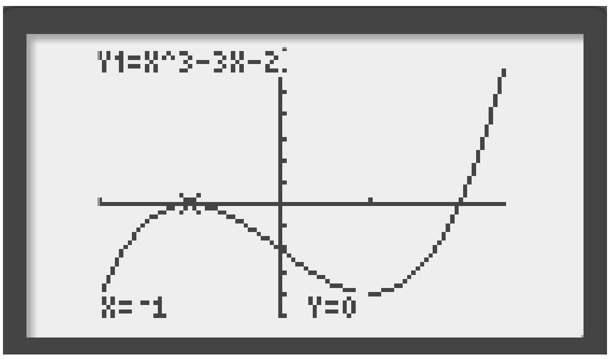


2.2 Lire des images

Lire les images des points : $-2, -1, 0, 1, 2, 2,5$

On trouve par lecture sur l'axe des ordonnées : $f(-2) = -4$, $f(-1) = 0$, $f(0) = -2$, $f(1) = -4$, $f(2) = 0$, $f(-2,5) = 6,125$.

Avec la calculette, étant dans le graph, on appuie sur la touche trace. On voit apparaître un curseur que l'on peut déplacer avec le flèches ◀ ▶ (gauche, droite). En bas de l'écran sont écrit les valeurs de l'abscisse X et de l'ordonnée Y du point.



2.3 Tableau de variation

Étudier les variations d'une fonction f, revient à savoir sur quels intervalles la fonction est croissante ou décroissante.

Définition 3 : Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si, et seulement si, x et $f(x)$ varient dans le même sens, c'est à dire :

$$\forall a \in \mathrm{I},\ \forall b \in I \quad \text{tel que si} \quad a < b, \quad \text{on a} \quad f(a) < f(b)$$

Une fonction f est **décroissante** sur I si, et seulement si, x et $f(x)$ varie dans le sens contraire, c'est à dire :

$$\forall a \in I,\ \forall b \in \mathrm{I} \quad \text{tel que si} \quad a < b, \quad \text{on a} \quad f(a) > f(b)$$

Remarque : Une fonction croissante ne change pas l'inégalité tandis qu'une fonction décroissante inverse l'inégalité.

On consigne les variations de la fonction f dans un **tableau de variation**. Une fonction croissante est représentée par un flèche montante et une fonction décroissante par un flèche descendante. On renseigne sur le tableau les valeurs extrêmes que prend la fonction. Pour notre fonction, on obtient la tableau de variation suivant :

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-4	↗	0	↘	-4	↗	6,125

2.4 Résolution d'équations

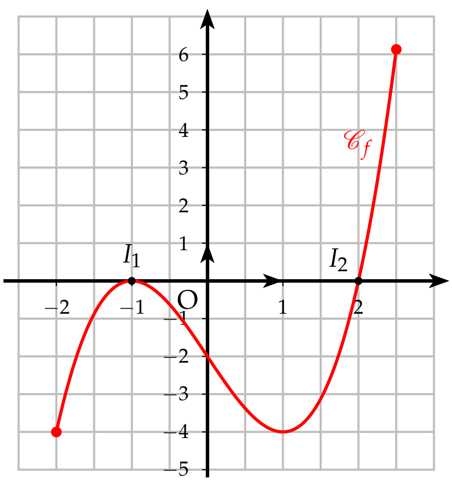
Règle 1 : Pour résoudre graphiquement $f(x) = a$:

- on trace la droite horizontale $y = a$
- on recherche les points d'intersection de la droite horizontale avec la courbe de la fonction f
- on détermine les abscisses de ces points d'intersection qui sont les solutions de l'équation

Résoudre graphiquement : $f(x) = 0$

- On cherche les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- On trouve deux points d'intersection I_1 et I_2
- On trouve les deux solutions en lisant les abscisses correspondantes aux point I_1 et I_2. On trouve alors

$$S = \{-1\,;\, 2\}$$



Remarque : La résolution graphique de $f(x) = 0$ revient à trouver des valeurs approchées des solutions de l'équation : $x^3 - 3x - 2 = 0$

Ti 82 stats :

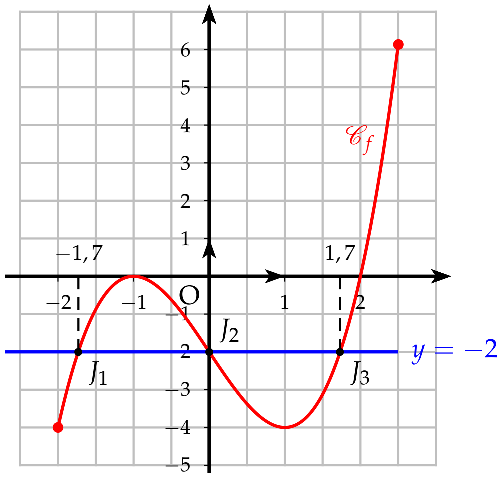
- On appuie sur (graphe) puis sur [calculs]. On choisit le menu 1 : *Zero*. On positionne le curseur sur la courbe à gauche du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses , on valide avec (entrer), on positionne le curseur sur la courbe après le point d'intersection puis on valide deux fois avec (entrer). On réitère le processus autant de fois qu'il y a des points d'intersection.
  On trouve alors les deux solutions :

$$X_1 = -1, \quad X_2 = 2$$

Résoudre graphiquement : $f(x) = -2$

- On trace la droite $y = -2$
- On trouve trois points d'intersection J_1, J_2 et J_3 entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = -2$.
- On reporte les abscisses des trois points. On trouve alors trois solutions (on prend les valeurs approchées).

$$S = \{-1{,}7\,;\,0\,;\,1{,}7\}$$



Remarque : La résolution graphique de $f(x) = -2$ revient à trouver des valeurs approchées des solutions de l'équation : $x^3 - 3x - 2 = -2$

Ti 82 stats :

- On rentre la droite $y = -2$ en appuyant sur (f(x)) : $Y_2 = -2$.
- On appuie sur (graphe) puis sur [calculs]. On choisit le menu 5 : *Intersect*. On positionne le curseur de la courbe 1 avant le point d'intersection, on valide avec (entrer), on positionne le curseur sur la courbe 2 (ici la droite) avant le point d'intersection puis on valide deux fois avec (entrer). On réitère le processus autant de fois qu'il y a des points d'intersection.
  On trouve alors les trois solutions :

$$X_1 = -1{,}732\,051, \quad X_2 = 1{,}88 \times 10^{-14} \simeq 0 \quad X_3 = 1{,}732\,050\,8$$

Algébriquement : Dans le cas, on peut résoudre algébriquement :

$$x^3 - 3x - 2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

On obtient alors les solutions exactes : $x_1 = -\sqrt{3}$ ou $x_2 = 0$ ou $x_3 = \sqrt{3}$

2.5 Résolution d'inéquations

Règle 2 : Pour résoudre les inéquations : $f(x) > a$ ou $f(x) \geqslant a$.

- On trace la droite horizontale $y = a$.
- Les solutions sont les abscisses des points qui sont **au dessus** de la droite $y = a$ et éventuellement sur celle-ci.

Pour résoudre les inéquations : $f(x) < a$ ou $f(x) \leqslant a$.

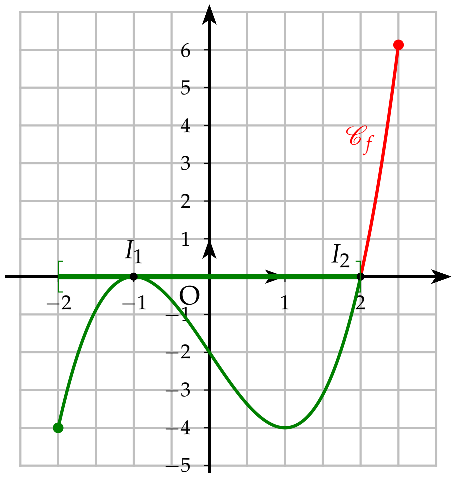
- On trace la droite horizontale $y = a$.
- Les solutions sont les abscisses des points qui sont **en dessous** de la droite $y = a$ et éventuellement sur celle-ci.

Résoudre graphiquement : $f(x) \leqslant 0$

Les abscisses des points qui sont au dessous et sur la droite des abscisses sont solutions.

On trouve comme solution :

$$S = [-2\,;\,2]$$



Remarque : Si l'on avait eu à résoudre $f(x) < 0$, les points sur la droite des abscisses ne sont plus solution. Il faut donc enlever les nombres -1 et 2. La solution sera donc :

$$S = [-2\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;\,2[$$

Pour l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, on trouve l'intervalle $[2\,;\,2,5]$ auquel il faut rajouter le nombre -1. On obtient donc comme solution :

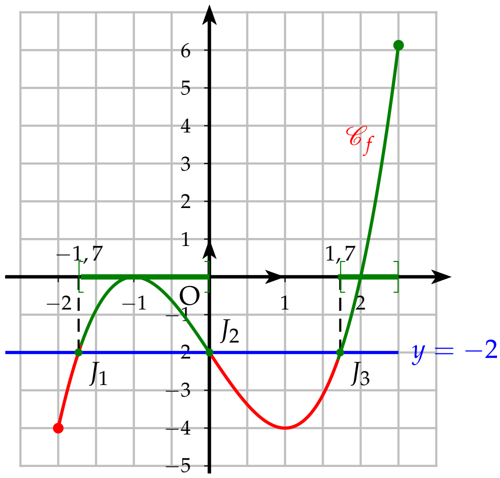
$$S = \{-1\} \cup [2\,;\,2,5]$$

Résoudre graphiquement : $f(x) \geqslant -2$

- On trace la droite $y = -2$.
- On prend alors les abscisses des points qui sont au dessus et sur cette droite. Deux intervalles sont possibles :

  On trouve alors comme solutions :

$$S = [-1,7\,;\,0] \cup [1,7\,;\,2,5]$$



Algébriquement : On retrouve ce résultat en résolvant l'inéquation :

$$x^3 - 3x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geqslant 0$$

On fait un tableau de signes :

x	-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$2{,}5$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On trouve alors : $S = [-\sqrt{3}\,;\,0] \cup [\sqrt{3}\,;\,2,5]$

2.6 Déterminer le signe d'une fonction

Lorsque l'on cherche graphiquement le signe d'une fonction f, on recherche les abscisses des points qui sont au dessus de l'axe des abscisse ($f > 0$) et les points qui sont en dessous ($f < 0$). On présente, en général, les résultats sous forme d'un tableau de signes. Pour notre fonction, on trouve :

x	-2		-1		2		$2{,}5$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

3 La fonction linéaire

La fonction linéaire est la plus simple des fonctions car elle traduit tout simplement le caractère proportionnel de deux quantités.

3.1 La proportionnalité

Avant d'étudier la proportionnalité, il est bon de rappeler ce qu'est la proportionnalité.

Définition 4 : Deux nombres x_1 et x_2 sont proportionnels respectivement aux nombres y_1 et y_2 si leurs rapports sont égaux, c'est à dire que :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k \qquad k \text{ est le coefficient de proportionnalité}$$

k est parfois appelé coefficient multiplicateur car pour connaître y_1 ou y_2 à partir de x_1 ou x_2, on effectue une multiplication

$$y_1 = k \times x_1 \qquad \text{et} \qquad y_2 = k \times x_2$$

Exemples : Les exemples concrets sont nombreux.

- La distance parcourue d est proportionnelle à la vitesse v : $d = vt$.
- Dans un circuit électrique la tension U est proportionnelle à l'intensité du courant I (loi d'Ohm) : $U = RT$
- Le poids d'un objet P est proportionnel à sa masse m : $P = mg$
- Dans une société la répartition du bénéfice est proportionnelle à la part de chaque actionnaire.
- En copropriété, les charges à payer sont proportionnelles à la surface habitée.
- Le prix de n objets identiques est proportionnel au prix d'un objet.
- ...

3.2 Résolution

Problème : Une voiture consomme 22 ℓ pour 275 km, sachant que sa consommation est proportionnelle au nombre de km parcourus, combien consomme-t-elle pour 200 km.

Plusieurs méthodes sont possibles pour résoudre ce problème.

3.2.1 Retour à l'unité : règle de trois

Pour 275 km, on consomme 22 ℓ,

pour 1 km, on consomme 275 fois moins soit $\dfrac{22}{275}\ \ell$,

pour 200 km, on consomme 200 fois plus soit $\dfrac{22}{275} \times 200 = 16\ \ell$

Réponse : La voiture consomme 16 litres pour 200 km.

3.2.2 Retour à un diviseur commun

Lorsque cela est possible, on cherche un diviseur commun entre deux valeurs d'une quantité. Ici 275 et 200 ont comme diviseur commun 25. Au lieu de revenir à l'unité, on revient au dénominateur commun :

Pour 275 km, on consomme 22 litres, comme $275 = 11 \times 25$

pour 25 km, on consomme 11 fois moins soit $\dfrac{22}{11} = 2\ \ell$, comme $200 = 8 \times 25$

pour 200 km, on consomme 8 fois plus soit $2 \times 8 = 16\ \ell$

Réponse : La voiture consomme 16 litres pour 200 km.

3.2.3 Tableau de proportionnalité

Cette méthode est basée sur le produit en croix, c'est à dire, en appelant x la quantité cherchée, que :

$$\frac{275}{22} = \frac{200}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{200 \times 22}{275}$$

Généralement, on remplit le tableau suivant :

275	200
22	x

Pour trouver x il suffit de multiplier la diagonale dont les quantités sont connus (22×200) et diviser par la dernière quantité connue (275).

Deux méthodes sont encore possibles, mais il faut auparavant étudier la fonction linéaire.

3.3 Définition

Définition 5 : Une fonction linéaire est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x associe un réel $f(x)$ tel que $f(x) = ax$.

$$\begin{array}{rccl} f \; : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = ax \end{array}$$

Le coefficient a s'appelle le **coefficient directeur**.

Exemples : Pour définir une fonction linéaire, il suffit de connaître le coefficient a. Soit f une fonction telle que $f(x) = 2x$

Reprenons l'exemple de la voiture qui consomme 22 litres pour 275 km. Appelons x la distance parcourue et $f(x)$ la consommation.

On peut remplir le tableau suivant :

275	x
22	$f(x)$

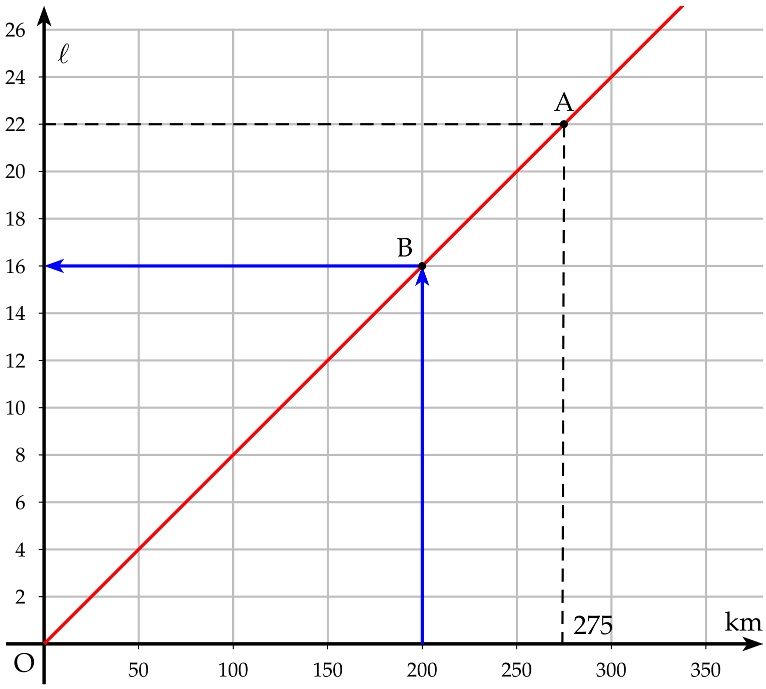
On a alors $f(x) = \dfrac{22x}{275} = 0,08x$

Remarque : Pour déterminer une fonction linéaire, il suffit de connaître une image. Dans l'exemple de notre voiture, on a $f(275) = 22$
La consommation pour 200 km est alors : $f(200) = 0,08 \times 200 = 16$.

3.4 Représentation d'une fonction linéaire

Propriété 1 : La représentation d'une fonction linéaire f est une droite qui passe par l'origine du repère ($f(0) = 0$).
Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points. Comme nous savons que cette droite passe par l'origine, il nous suffit de connaître un seul point qui correspond alors à une image de la fonction f.

Dans l'exemple de notre voiture, nous avons $f(275) = 22$, donc la droite représentant la fonction f passe par le point $A(275\ ;\ 22)$. Nous pouvons ainsi tracer la représentation de la fonction f. En cherchant le point B de la droite d'abscisse 200, nous retrouvons la solution de notre problème.



3.5 Propriétés du coefficient directeur

Représentons les fonctions linéaire suivantes :

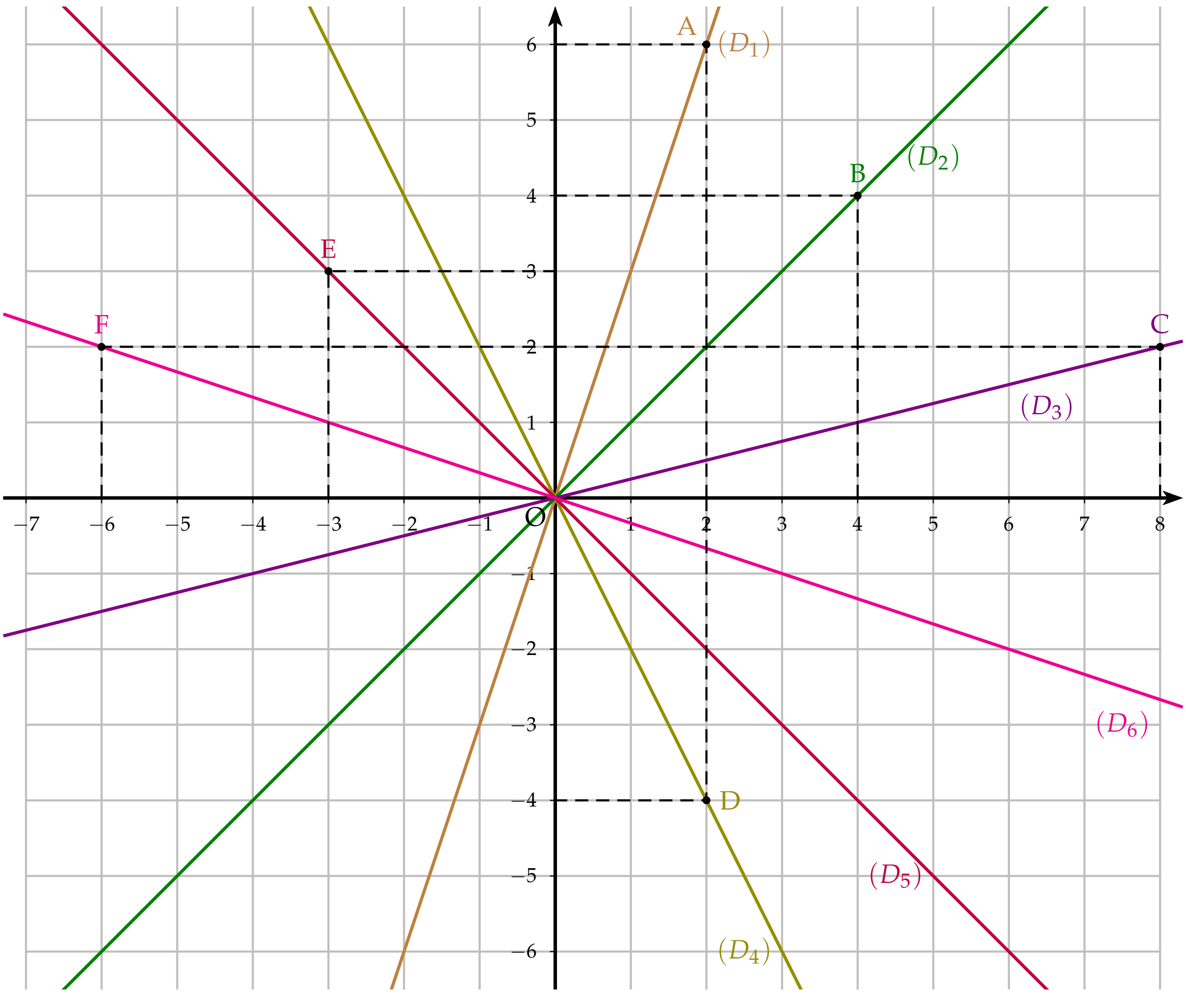
$$f_1(x) = 3x \qquad f_2(x) = x \qquad f_3(x) = \frac{1}{4}x$$
$$f_4(x) = -2x \quad f_5(x) = -x \quad f_6(x) = -\frac{1}{3}x$$

Pour tracer chaque fonction, il faut déterminer un point :

- Pour $f_1(x) = 3x$,
  on calcule par exemple $f_1(2) = 3 \times 2 = 6$,
  donc la droite (D_1) représentant f_1 passe par le point A$(2\,;\,6)$
- Pour $f_2(x) = x$,
  on calcule par exemple $f_2(3) = 3$,
  donc la droite (D_2) représentant f_2 passe par le point B$(3\,;\,3)$
- Pour $f_3(x) = \dfrac{1}{4}x$,
  on calcule par exemple $f_3(8) = \dfrac{1}{4} \times 8 = 2$,
  donc la droite (D_3) représentant f_3 passe par le point C$(8\,;\,2)$
- Pour $f_4(x) = -2x$,
  on calcule par exemple $f_4(2) = -2 \times 2 = -4$,
  donc la droite (D_4) représentant f_4 passe par le point D$(2\,;\,-4)$
- Pour $f_5(x) = -x$,
  on calcule par exemple $f_5(-3) = -(-3) = 3$,
  donc la droite (D_5) représentant f_5 passe par le point E$(-3\,;\,3)$
- Pour $f_6(x) = -\dfrac{1}{3}x$,
  on calcule par exemple $f_6(-6) = -\dfrac{1}{3} \times (-6) = 2$,

donc la droite (D_6) représentant f_6 passe par le point F$(-6\,;\,2)$

La représentation des six fonctions donne :



Au vue de ces représentations graphique, on constate que :

- Lorsque le coefficient a est positif, c'est à dire pour les représentations (D_1), (D_2) et (D_3), les droites sont situées dans les cadrans 1 et 3. Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont donc croissantes.
- Lorsque le coefficient a est négatif, c'est à dire pour les représentations (D_4), (D_5) et (D_6), les droites sont situées dans les cadrans 2 et 4. Les fonctions f_4, f_5 et f_6 sont donc décroissantes.
- Plus la valeur absolue du coefficient a est grande, plus la droite est verticale. En effet, de (D_3) à (D_1) les droites sont de plus en plus verticales, leurs coefficients directeurs passent de $\dfrac{1}{4}$ pour (D_3) à 3 pour (D_1).

3.6 Propriétés

Définition 6 : On appelle taux d'accroissement T de la fonction f entre les quantités x_1 et x_2, la quantité définie par :

$$\mathrm{T} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Propriété 2 : Une fonction linéaire est **croissante** respectivement **décroissante** si, et seulement si, son coefficient directeur a est **positif** respectivement **négatif**.

Démonstration : Pour montrer la croissance d'une fonction, il suffit de montrer qu'elle conserve la relation d'ordre c'est à dire un taux d'accroissement T positif. Pour montrer la décroissance d'une fonction, il suffit de montrer qu'elle inverse la relation d'ordre c'est à dire un taux d'accroissement T négatif. Montrons que le taux d'accroissement T d'une fonction linéaire est constant.

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

- Si $a > 0$ le taux d'accroissement est positif donc la fonction f est croissante.
- Si $a < 0$ le taux d'accroissement est toujours négatif donc la fonction est décroissante.

Règle 3 : Si une fonction f est linéaire alors :

$$\begin{array}{ll} \forall x_1 \in \mathbb{R},\ \forall x_2 \in \mathbb{R} & f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall k \in \mathbb{R} & f(kx) = k \times f(x) \end{array}$$

Ces deux propriétés sont appelées propriété additive et multiplicative. Elles caractérisent la proportionnalité.

4 Fonction affine

4.1 Définition

Définition 7 : Une fonction affine est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à un réel x associe la quantité $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels fixés.

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = ax + b \end{array}$$

Le coefficient a s'appelle le **coefficient directeur**.
Le coefficient b s'appelle l'**ordonnée à l'origine**.

Cas particuliers :
- Si $b = 0$, la fonction affine f est une fonstion linéaire : $f(x) = ax$
- Si $a = 0$, la fonction affine f est une fonction constante : $f(x) = b$

Remarque : Dans une fonction affine ce n'est pas $f(x)$ qui est proportionnel à x mais sa variation.

Exemples :

1) Un chauffeur de taxi pratique les prix suivants :
   - 2,50 € la prise en charge
   - 0,30 € par km parcouru

   Quel est le prix $f(x)$ demandé par le taxi pour une course de x km ?

$$f(x) = 0,30x + 2,50$$

2) Une voiture possède un réservoir de 54 litres et consomme 6 litres pour 100 km. Au départ le réservoir est plein. La voiture parcours x km. Quel est le nombre de litres $g(x)$ restant dans le réservoir ?

   Comme la voiture consomme 6 ℓ pour 100 km, elle consomme 0,06 ℓ pour 1 km et donc $0,06x$ ℓ pour x km, donc :

$$g(x) = -0,06x + 54$$

4.2 Comment déterminer une fonction affine ?

Dans une fonction affine, nous avons besoin de deux informations pour déterminer les coefficients a et b.

4.2.1 On donne deux images

Règle 4 : Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$. Si on connaît deux images telle que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, alors on a :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{et} \qquad b = f(x_1) - ax_1$$

Démonstration : Si $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ on peut écrire :

$$y_1 = ax_1 + b \qquad \text{et} \qquad y_2 = ax_2 + b$$

Calculons la quantité $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1)$$

On a donc bien : $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

De $y_1 = ax_1 + b$ on en déduit que : $b = y_1 - ax_1 = f(x_1) - ax_1$

Exemple : Déterminer la fonction affine f telle que : $f(-2) = -4$ et $f(1) = 5$:

On calcule le coefficient directeur :

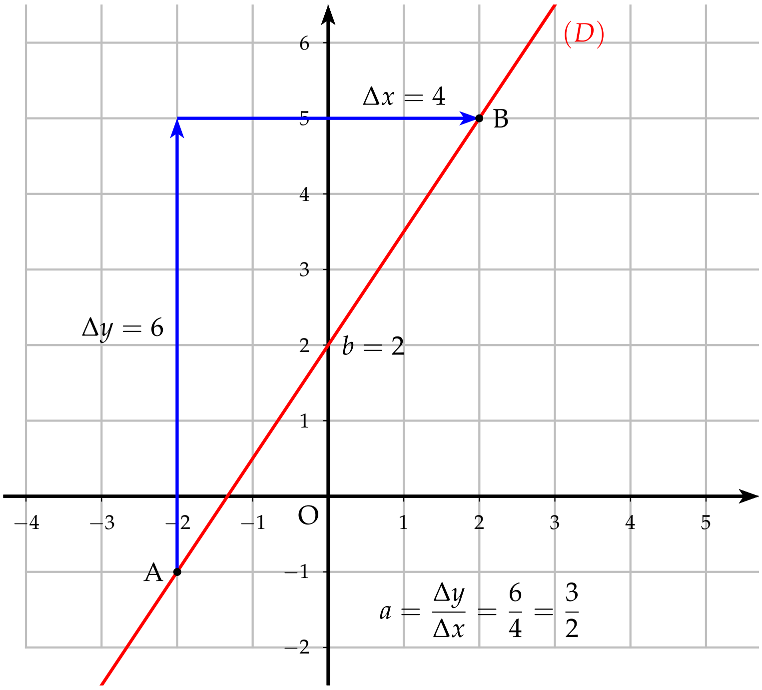
$$a = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{5 - (-4)}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

On calcule l'ordonnée à l'origine : $b = f(1) - 3 \times 1 = 5 - 3 = 2$

La fonction affine recherchée a pour expression : $f(x) = 3x + 2$.

4.2.2 On donne la représentation graphique

Soit le représentation (D) d'une fonction affine f :



On sait que le coefficient directeur $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Il correspond donc à une différence d'ordonnées Δy sur une différence d'abscisses Δx entre deux points de la droite correspondante à la représentation de la fonction f. Sur le graphique, on peut donc repérer deux points A et B et trouver ainsi a :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{différence d'ordonnées}}{\text{différence d'abscisses}}$$

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine b, il suffit de lire l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées :

$$b = \text{ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées}$$

Dans l'exemple ci-dessus, on trouve donc : $f(x) = \dfrac{3}{2}x + 2$

4.3 Représentation d'une fonction affine

Propriété 3 : La représentation d'une fonction affine est une droite mais qui ne passe pas nécessairement par l'origine si $b \neq 0$. Pour tracer cette droite, nous avons besoin de deux points qui correspondent à deux images.
Cas particuliers
Si $b = 0$ la droite passe par l'origine (fonction linéaire).
Si $a = 0$ la droite est horizontale (fonction constante)

Exemple : Représenter les fonction f, g et h définies par :

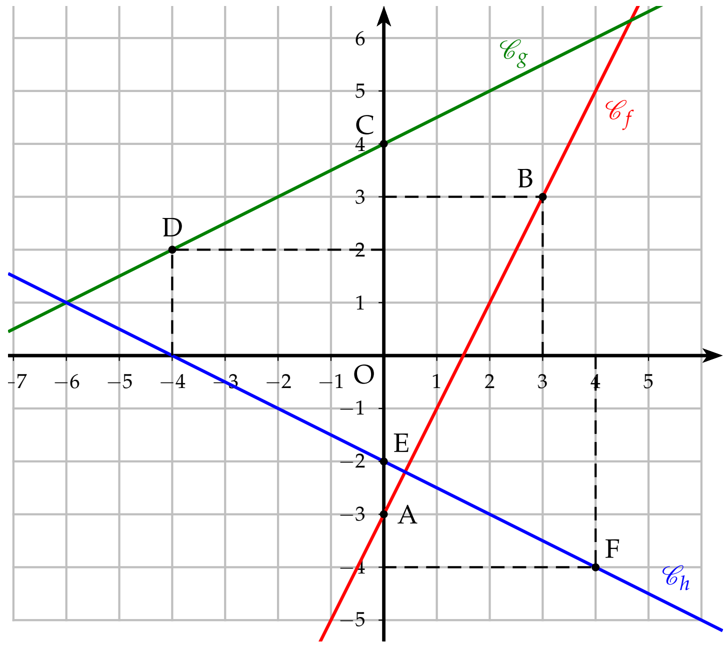
$$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad ; \quad h(x) = -\frac{1}{2}x - 2$$

Le choix des images pour tracer la droite est arbitraire. Cependant, ce choix doit tenir compte de l'échelle du repère que l'on choisit, ainsi que de la précision du tracé de cette droite. Pour ces deux raisons, dans la mesure du possible on calculera l'image de 0, car elle est facile à calculer et correspond à l'ordonnée à l'origine et l'on choisira la deuxième image de façon à obtenir un point qui n'est pas trop proche du premier de façon à obtenir un bon tracé de la droite.

Calculons deux images pour les fonctions f, g et h.

- Pour f : $f(0) = -3$ et $f(3) = 2 \times 3 - 3 = 3$.
  Donc la représentation de la fonction f passe par les points $A(0\,;\,-3)$ et $B(3\,;\,3)$.
- Pour g : $g(0) = 4$ et $g(-4) = \frac{1}{2} \times (-4) + 4 = 2$.
  Donc la représentation de la fonction g passe par les points $C(0\,;\,4)$ et $D(-4\,;\,2)$.
- Pour h : $h(0) = -2$ et $h(4) = -\frac{1}{2} \times 4 - 2 = -4$.
  Donc la représentation de la fonction h passe par les points $E(0\,;\,-2)$ et $F(4\,;\,-4)$.

On trace ensuite les fonctions f, g et h.



4.4 Propriété du coefficient directeur

Propriété 4 : Le taux d'accroissement d'une fonction affine est égale au coefficient directeur. On a donc

- Une fonction affine est croissante, respectivement décroissante, si, et seulement si, le coefficient directeur a est positif, respectivement négatif.
- Les représentations de deux fonctions affines sont parallèles si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux.

4.5 Fonction affine définie par morceaux

Définition 8 : Une fonction affine peut changer d'expression suivant l'intervalle dans lequel se situe la variable x. On dit alors que la fonction est définie par morceaux.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f \; : \; \begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si} \quad x \in]-\infty\,;\, 2[\\ f(x) = -x + 5 & \text{si} \quad x \in [2\,;\, +\infty[\end{cases}$$

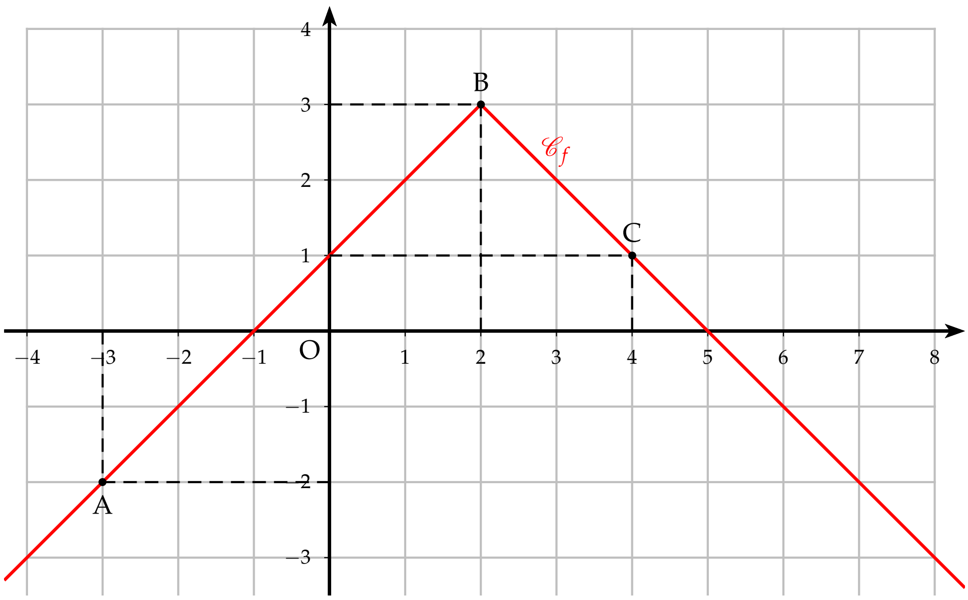
Pour calculer l'image de -3 on prendra la première expression car $-3 \in]-\infty\,;\,2[$, pour l'image de 4 on prendra la deuxième car $4 \in [2\,;\,+\infty[$.

$$f(-3) = -3 + 1 = -2 \qquad \text{et} \qquad f(4) = -4 + 5 = 1$$

Remarque : Lorsque l'on calcule l'image de 2, on doit prendre la deuxième expression $f(2) = -2 + 5 = 3$, cependant lorsque l'on utilise la première expression $f(2) = 2 + 1 = 3$, on trouve le même résultat. On dit alors que la fonction f est **continue** en $x = 2$, il n'y aura donc pas de « cassure » dans la représentation de la fonction f. Comme la fonction f, continue en $x = 2$, possède deux expressions, sa représentation graphique sera deux demi-droites. Il sera alors nécessaire de déterminer au moins trois points pour tracer la représentation de la fonction f.

- Comme $f(-3) = -2$ la représentation de la fonction f passe par $\text{A}(-3\,;\,-2)$
- Comme $f(2) = 3$ la représentation de la fonction f passe par $\text{B}(2\,;\,3)$
- Comme $f(4) = 1$ la représentation de la fonction f passe par $\text{C}(4\,;\,1)$

On obtient alors la représentation suivante :



5 Optimisation et autres application des fonctions affines

5.1 Optimisation

Une agence de voiture propose deux types de contrat de location d'une voiture pour une journée.

- Contrat N°1 : 30 € de forfait et $0,40$ € par km
- Contrat N°2 : 57 € de forfait et $0,25$ € par km

Pour x km parcourus, le prix à payer est $f(x)$ pour le premier contrat et $g(x)$ pour le second.

1) Donner les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.

2) Construire dans un même repère les représentations de f et g pour les valeurs de x comprise entre 0 et 500 km.

3) Indiquer, en utilisant le graphique, le type de contrat le plus avantageux suivant le nombre de km parcourus.

4) Retrouver ces résultats par le calcul.

⇒ ⇒

1) Les expressions des fonctions sont immédiates, on a :

$$f(x) = 30 + 0,40x \qquad \text{et} \qquad g(x) = 57 + 0,25x$$

2) Pour représenter les fonction f et g, il faut déterminer deux images pour chacune des fonctions. Comme la variable a une amplitude donnée (entre 0 et 500km), il est intéressant, pour la précision du graphique de prendre les image de 0 et 500. On peut représenter les résultats dans un tableau.

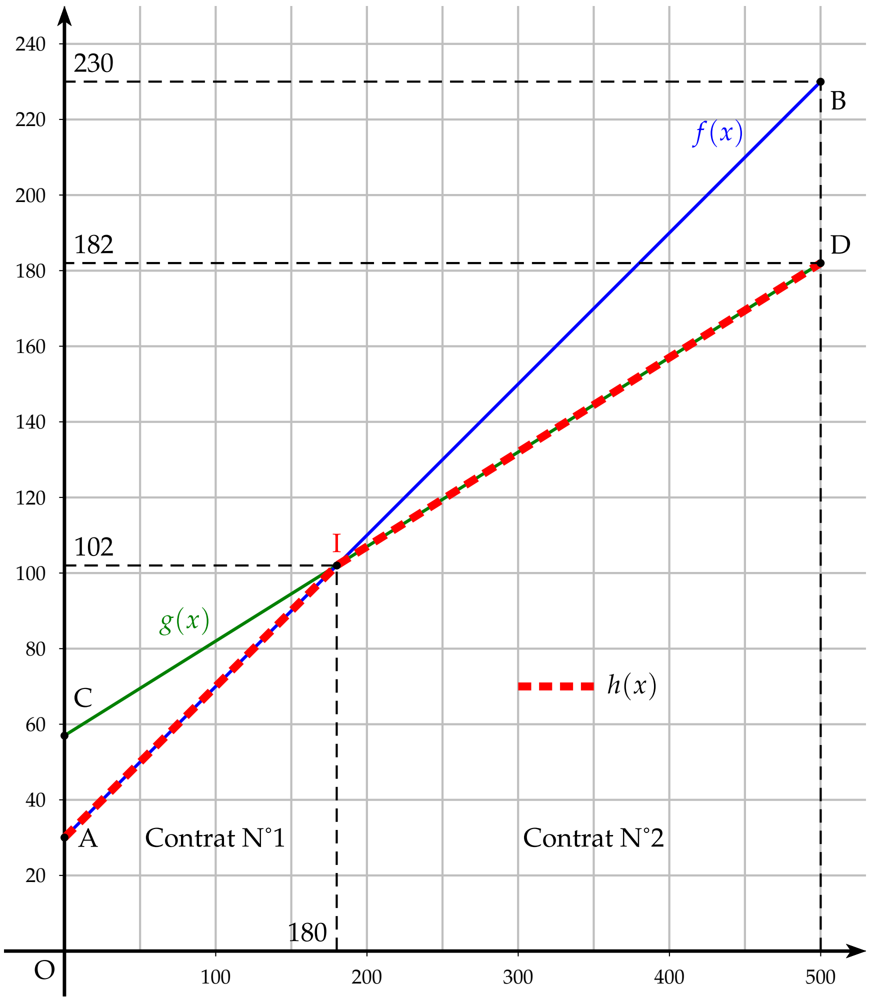
x	0	500
$f(x)$	30	$f(500) = 30 + 0,4 \times 500 = 230$
$g(x)$	57	$g(500) = 57 + 0,25 \times 500 = 182$

La représentation de f passe donc par les points $A(0\,;\,30)$ et $B(500\,;\,230)$.

La représentation de g passe donc par les points $C(0\,;\,57)$ et $D(500\,;\,182)$.

Il reste à déterminer les unités graphiques. Comme x varie entre 0 et 500, et y entre 0 et 230 on peut prendre :

sur les abscisses : 2 cm = 100 km   et sur les ordonnées : 1 cm = 20 €.



3) Si l'on veut déterminer le contrat le plus avantageux suivant le nombre de km parcourus, le prix doit être le plus petit possible. On cherche donc, sur la représentation des deux fonctions, les segments les plus bas possible. Les deux droites se coupent en un point I. En I le prix des deux contrats sont identiques. Cela correspond à 180 km. On a donc :
   - Si l'on parcourt moins de 180 km, le contrat N°1 est plus avantageux.
   - Si l'on parcourt plus de 180 km, le contrat N°2 est plus avantageux.
   - Si l'on parcourt 180 km les deux contrats sont équivalent.

4) Retrouvons ces résultats par le calcul :
   Pour déterminer l'abscisse du point I, il faut résoudre l'équation :

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 30 + 0,40x = 57 + 0,25x \quad \Leftrightarrow \quad 0,40x - 0,25x = 57 - 30$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,15x = 27 \qquad \text{soit} \qquad x = \frac{27}{0,15} = 180$$

   Pour connaître le contrat le plus avantageux, il faut déterminer le signe de la quantité $f(x) - g(x)$. Si cette quantité est négative, le contrat N°1 est plus avantageux, si elle est positive le contrat N°2 est plus avantageux.

$$f(x) - g(x) = 30 + 0,40x - 57 - 0,25x = -27 + 0,15x$$

   Cette quantité s'annule pour $x = 180$, on peut alors remplir un tableau de signes :

x	0		180		500
$-27+0{,}15x$		$-$	0	$+$	

On retrouve alors les résultats de la solution graphique.

Remarque : On peut créer une nouvelle fonction h, définie sur $[0\,;\,500]$, qui à un nombre x de km parcourus associe le tarif le plus avantageux. Il s'agit d'une fonction affine définie par morceaux :

$$h\ :\ \begin{cases} h(x) = 30 + 0,40x & \text{si} \quad x \in [0\,;\,180] \\ h(x) = 57 + 0,25x & \text{si} \quad x \in [180\,;\,500] \end{cases}$$

On a représenté cette fonction en pointillé rouge sur le graphique.

5.2 Autre application : conversion d'unité

En France l'unité usuelle de température est le degré Celsius qui est noté ˚C. Dans certains pays anglo-saxon, comme les États-Unis, l'unité usuelle est le degré Fahrenheit qui est noté ˚F. Tous les français en visite à Los Angeles ont éprouvé un certain malaise en écoutant la météo annoncée une température de 90˚ pour le lendemain. Il s'agit bien évidement de degré Fahrenheit. Effaçons ce malaise en convertissant les degrés Celsius en degré Fahrenheit à l'aide d'une fonction affine. Il faut bien évidement deux informations pour déterminer cette fonction. Les changements d'états de l'eau – servant de base à la définition du degré Celsius – permettent la conversion :

- Quand l'eau gèle (0˚C) un californien pense 32˚F.
- Quand l'eau bout (100˚C) le californien pense 212˚F.

1) Déduire de ces renseignements l'expression de $f(x)$ où f est la fonction qui à une température x exprimée en degré Celsius associe la température $f(x)$ exprimée en degré Fahrenheit.
2) Représenter la fonction f pour une température comprise entre 0 et 50˚C.
3) Utiliser ce graphique pour répondre aux questions suivantes :
   - Lorsqu'à Los Angeles le thermomètre indique 90˚F, est-ce une température caniculaire ?
   - Un médecin américain s'inquiète-t-il quand le thermomètre d'un malade indique 100˚F ?
   - A quelle température dans sa chambre d'hôtel, un touriste français à Los Angeles doit-il s'attendre ?
4) Retrouver ces résultats par le calcul.
5) Peut-on trouver une température qui s'exprime par le même nombre en $^\circ$ C et $^\circ$ F ?

1) D'après les états de l'eau, on a :

$$f(0) = 32 \qquad \text{et} \qquad f(100) = 212$$

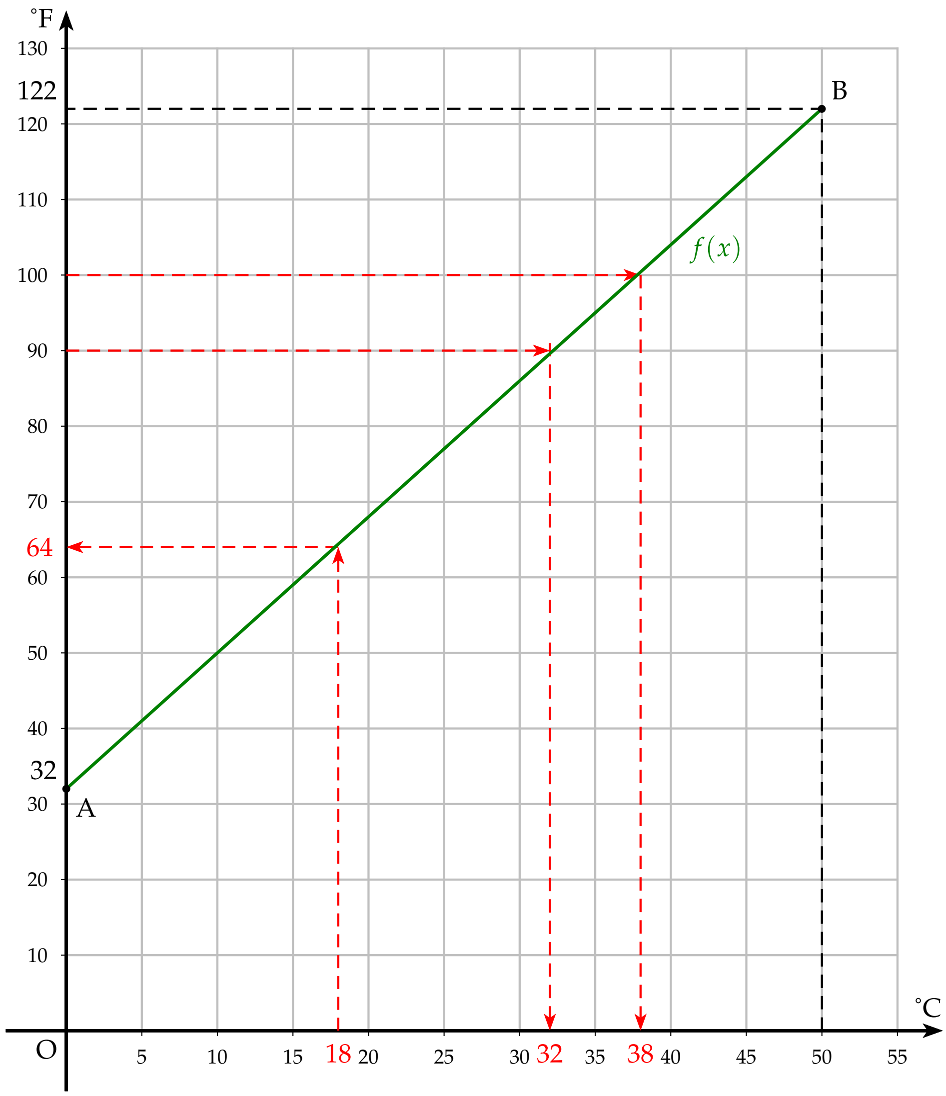
Comme f est une fonction affine, elle est du type $f(x) = ax + b$, on a alors :

$$a = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1,8 \qquad \text{et} \qquad b = 32 \quad \text{ordonnée à l'origine}$$

La fonction f a donc pour expression : $f(x) = 1,8x + 32$

2) Pour représenter la fonction f pour $x \in [0\ ;\ 50]$, on détermine les images extrêmes
   $f(0) = 32$ donc la représentation passe par le point A$(0\ ;\ 32)$.
   $f(50) = 1,8 \times 50 + 32 = 122$ donc la représentation passe par le point B$(50\ ;\ 122)$.
   On prendra comme unité :
   - 2 cm = 10°C sur l'axe des abscisses
   - 1 cm = 10° F sur l'axe des ordonnées

   On obtient alors :



3) - Graphiquement, une température de 90° F correspond à une température d'environ de 32° C. Une température de 90° F est tout à fait habituelle à Los Angeles.
   - Graphiquement, une température de 100° F correspond à une température d'environ de 38° C. Un médecin s'inquiète donc nullement lorsque la température d'un malade est de 100° F.
   - On peut prendre comme température d'une chambre d'hôtel climatisée 18° C. Graphiquement, on trouve alors 64° F. Un touriste français s'attend à avoir une température de 64°F dans sa chambre d'hôtel.

4) Pour retrouver ces résultats par le calcul il faut résoudre :

- Pour une température de 90˚ F

$$f(x) = 90 \quad \Leftrightarrow \quad 1,8x + 32 = 90 \quad \Leftrightarrow \quad 1,8x = 90 - 32$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{58}{1,8} \simeq 32,2$$

- Pour une température de 100˚ F

$$f(x) = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 1,8x + 32 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 1,8x = 100 - 32$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{68}{1,8} \simeq 37,8$$

  Cette température du corps a servi de référence pour définir le 100˚F

- Pour une température de 18˚C,

$$f(18) = 1,8 \times 18 + 32 = 32,4 + 32 = 64,4$$

5) Si une température s'exprime par la même nombre en ˚C et ˚F, alors on a :

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 1,8x + 32 = x \quad \Leftrightarrow \quad 1,8x - x = -32$$
$$\Leftrightarrow \quad 0,8x = -32 \qquad \text{soit} \qquad x = -\frac{32}{0,8} = -40$$

Une température de -40˚ peut être aussi bien des ˚C que des ˚F.