

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.VII. Les problèmes hyperstatiques

A.VII.1 Introduction

Au chapitre d'analyse des mécanismes, nous avons appris à calculer le degré d'hyperstatisme des mécanismes **indéformables** et nous avons vu que si un mécanisme était hyperstatique, il devenait impossible de déterminer toutes les inconnues de liaisons. Nous avons montré que chaque degré d'hyperstatisme traduit une condition géométrique à respecter.

A présent, dans le cas des poutres, nous connaissons la relation entre les efforts dans une poutre et ses déformations. Nous allons voir qu'il devient possible d'ajouter aux problèmes hyperstatiques les équations manquantes permettant de déterminer toutes les inconnues de liaisons en prenant en compte le comportement des structures étudiées et la compatibilité des déplacements issus des déformations de chaque pièce.

Tout problème hyperstatique ne l'est que parce que les pièces sont supposées indéformables. La prise en compte de la déformation des pièces permet de lever l'hyperstatisme.

Dans le cadre du programme, seuls les mécanismes à 1 degré d'hyperstatisme sont étudiés. Attention toutefois, un mécanisme hyperstatique de degré 3 peut être vu comme un mécanisme à 3 fois 1 degré d'hyperstatisme à lever...

A.VII.2 Méthode de résolution

Pour résoudre un problème hyperstatique à l'aide de la RDM, considérons ici une poutre telle que $h=1$, il convient de procéder ainsi :

- Calculer h et identifier les causes de l'hyperstatisme :
 - hyperstatisme en effort : on s'intéresse à la translation associée
 - hyperstatisme en moment : on s'intéresse à la rotation associée
- Isoler le solide et déterminer le système d'équations statique du problème
- L'hyperstatisme étant toujours issu d'au moins deux liaisons redondantes, « en trop », identifier l'une des deux liaisons à son origine (ce choix influence la suite) et son inconnue statique associée
- Identifier la sollicitation à étudier et rappeler la formule permettant de mettre en relation les éléments de réduction du torseur de cohésion avec la déformation de la poutre.
- Proposer la relation géométrique imposée par la liaison identifiée précédemment, à l'origine du degré d'hyperstatisme
- Exprimer les inconnues du problème statique associées à la sollicitation étudiée en fonction de l'inconnue associée à cette liaison
- Exprimer les éléments de réduction du torseur de cohésion associés à la déformation étudiée en fonction de l'inconnue statique indéterminée et des données du problème (charges extérieures et géométrie)
- Se ramener à un problème isostatique : refaire le schéma du système en supprimant **le degré de liberté** de la liaison associée à l'inconnue statique choisie précédemment tout en gardant comme effort extérieur la composante statique associée. En général, cela revient à supprimer la liaison si c'est une ponctuelle, ou une autre liaison si on peut négliger d'autres composantes.

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

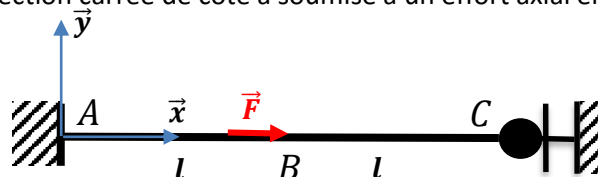
- Déterminer l'équation de la déformée de la poutre pour la sollicitation étudiée en fonction de l'effort inconnu.
- Ecrire l'équation traduisant la condition géométrique imposée par le DDL de la liaison supprimée :
 - o Soit la liaison était entre la pièce étudiée et le bâti, on obtient alors une condition de déplacement ou de rotation nulle
 - o Soit la liaison était entre la pièce étudiée et une autre pièce du mécanisme, on met alors en place une équation de compatibilité des déplacements des deux pièces issue des déplacements et/ou déformations de celles-ci, par exemple même rotation dans les deux pièces etc.
- Regrouper les 6 équations du problème initial et y ajouter la nouvelle équation, puis résoudre.
- Enfin, si nécessaire, étudier les contraintes et déformations dans la poutre connaissant les différents efforts extérieurs appliqués en utilisant les résultats intermédiaires obtenus lors de la résolution.

A.VII.3 Applications

Les cas d'hyperstatisme les plus rencontrés sont l'hyperstatisme lié à la traction-compression et à la flexion.

A.VII.3.a Traction-Compression

Soit la poutre suivante de section carrée de côté a soumise à un effort axial en B :



Objectif : Déterminer toutes les actions des liaisons.

• H. hyperstatisme, liaison « en trop » et inconnue statique associée :

$$h = m + I_S - E_S = 0 + 7 - 6 = 1$$

Le degré d'hyperstatisme est une translation suivant $\vec{x}$.

On identifie la liaison « en trop » en C (choix) : Inconnue X_C

• Isolement

$$\begin{pmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{pmatrix}_A^B + \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B^B + \begin{pmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_C^B = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{pmatrix}_A^B + \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A^B + \begin{pmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A^B = \{0\}$$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

$$\begin{cases} X_A + F + X_C = 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \end{cases}$$

$$X_A + X_C = -F$$

• **Sollicitation et déformation liée à l'hyperstatisme**

L'hyperstatisme en effort suivant $\vec{x}$ nous conduit à étudier la sollicitation de Traction-Compression et à déterminer la déformation de la poutre en translation suivant $\vec{x}$.

$$\text{Traction compression : } \Delta L = \frac{NL}{ES}$$

• **Relation géométrique imposée par la liaison « en trop »**

$$u(2l) = 0$$

• **Inconnues statiques en fonction d'une autre**

On choisit d'exprimer toutes les inconnues statiques en fonction de X_C et des données du problème :

$$X_A = -X_C - F$$

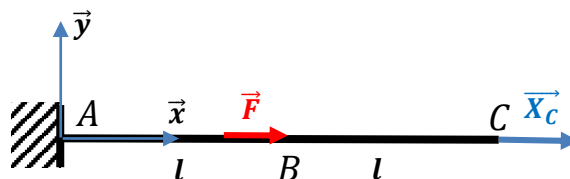
• **Torseur de cohésion**

On exprime alors le torseur de cohésion dans les 2 tronçons en fonction de Y_C et des données du problème :

Tronçon 1 : AB - $x \in]0; l[$	Tronçon 2 : BC - $x \in]l; 2l[$
$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_C\} &= \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 2}\} \\ \{\mathcal{T}_C\} &= \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_C \\ \{\mathcal{T}_C\} &= \begin{pmatrix} F + X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_M \end{aligned}$	$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_C\} &= \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 2}\} \\ \{\mathcal{T}_C\} &= \begin{pmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_C \\ \{\mathcal{T}_C\} &= \begin{pmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_M \end{aligned}$

• **Problème isostatique associé**

On supprime la liaison en C :



Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

• **Equation de la déformée**

$\Delta L = u(x) - u(0) = u(x) = N \frac{x}{ES}$	
$\Delta L_1(x) = u_1(x) - u_1(0) = N \frac{x}{ES}$ $u_1(0) = 0$ $u_1(x) = N_1 \frac{x}{ES}$ $u_1(x) = (F + X_C) \frac{x}{ES}$ $u_1(l) = (F + X_C) \frac{l}{ES}$	$\Delta L_2(x) = u_2(x) - u_2(l) = N \frac{x-l}{ES}$ $u_2(x) - u_2(l) = X_C \frac{x-l}{ES}$ Continuité de la poutre : $u_2(l) = u_1(l)$ $u_2(x) = u_1(l) + X_C \frac{x-l}{ES}$ $u_2(x) = (F + X_C) \frac{l}{ES} + X_C \frac{x-l}{ES}$ $u_2(x) = F \frac{l}{ES} + X_C \frac{x}{ES}$

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) \forall x \in]0, l[\\ u_2(x) \forall x \in]l, 2l[\end{cases}$$

$$u_2(x) = F \frac{l}{ES} + X_C \frac{x}{ES}$$

• **Nouvelle équation - Compatibilité des déplacements**

$$u(2l) = u_2(2l) = 0$$

$$u_2(2l) = F \frac{l}{ES} + X_C \frac{2l}{ES} = 0$$

$$F + 2X_C = 0$$

• **Equations et résolution**

$$\begin{cases} X_A + F + X_C = 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \\ F + 2X_C = 0 \end{cases}$$

$X_C = -\frac{F}{2}$	$X_A = -F - X_C$
	$X_A = -\frac{F}{2}$

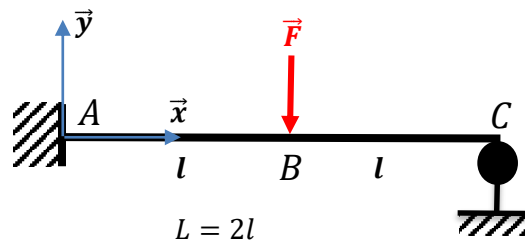
• **Obtention de la déformation en un point si nécessaire**

$$u_2(x) = F \frac{l}{ES} + X_C \frac{x}{ES} = \frac{2Fl}{2ES} - \frac{F}{2} \frac{x}{ES} = \frac{Fl}{2ES} (2l - x)$$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.VII.3.b Flexion

Soit la poutre suivante de section rectangulaire de largeur b et de hauteur h dans le sens de l'effort:



Objectif : Déterminer la flèche de la poutre en B.

• **H. hyperstatisme, liaison « en trop » et inconnue statique associée :**

$$h = m + I_S - E_S = 0 + 7 - 6 = 1$$

Le degré d'hyperstatisme est une translation suivant $\vec{y}$.

On identifie la liaison « en trop » en C (choix) : Inconnue Y_C

• **Isolement**

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} 0 \\ Y_C \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_C = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Fl \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 \\ Y_C \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2lY_C \end{Bmatrix}_C = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A - F + Y_C = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A - Fl + 2lY_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A + Y_C = F \\ N_A + 2lY_C = Fl \end{cases}$$

• **Sollicitation et déformation liée à l'hyperstatisme**

L'hyperstatisme en translation suivant $\vec{y}$ nous conduit à étudier la sollicitation en flexion et à déterminer la déformation de la poutre en translation suivant $\vec{y}$.

$$\text{Flexion : } y''(x) = \frac{M_{fz}}{EI_{g_z}}$$

• **Relation géométrique imposée par la liaison « en trop »**

$$y(2l) = y_2(2l) = 0$$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

• **Inconnues statiques en fonction d'une autre**

On choisit d'exprimer toutes les inconnues statiques en fonction de Y_C et des données du problème :

$$\begin{cases} Y_A = F - Y_C \\ N_A = Fl - 2lY_C \end{cases}$$

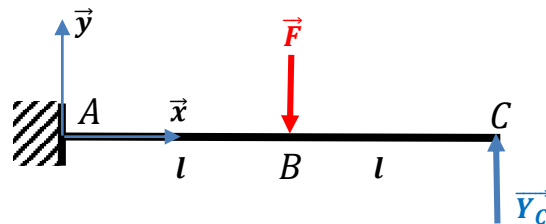
• **Torseur de cohésion**

On exprime alors le torseur de cohésion dans les 2 tronçons en fonction de Y_C et des données du problème :

Tronçon 1 : AB - $x \in]0; l[$	Tronçon 2 : BC - $x \in]l; 2l[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 2}\}$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F + Y_C & 0 \\ 0 & x(F - Y_C) + l(2Y_C - F) \end{Bmatrix}_M$ $-F(l - x) + Y_C(2l - x) = x(F - Y_C) + l(2Y_C - F)$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 2}\}$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & Y_C(2l - x) \end{Bmatrix}_M$

• **Problème isostatique associé**

On supprime la liaison en C :



• **Equation de la déformée**

$y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{g_z}}$	
Tronçon 1 $EI_{g_z} y_1''(x) = M_{f_{z1}}$ $EI_{g_z} y_1''(x) = x(F - Y_C) + l(2Y_C - F)$ EI_{g_z} étant constant : $EI_{g_z} y_1'(x) = x^2 \frac{F - Y_C}{2} + xl(2Y_C - F) + k^1_1$ $EI_{g_z} y_1(x) = x^3 \frac{F - Y_C}{6} + x^2 \frac{l(2Y_C - F)}{2} + k^1_1 x + k^2_1$ Liaison prise en compte : $y_1(0) = k^2_1 = 0$ $y_1'(0) = k^1_1 = 0$	Tronçon 2 $EI_{g_z} y_2''(x) = M_{f_{z2}}$ $EI_{g_z} y_2''(x) = -xY_C + 2lY_C$ EI_{g_z} étant constant : $EI_{g_z} y_2'(x) = -x^2 \frac{Y_C}{2} + x2lY_C + k^1_2$ $EI_{g_z} y_2(x) = -x^3 \frac{Y_C}{6} + x^2 lY_C + k^1_2 x + k^2_2$ Continuité de la poutre $y_2(l) = y_1(l)$ $y_2'(l) = y_1'(l)$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

$EI_{g_z} y_1(x) = x^3 \frac{F - Y_C}{6} + x^2 \frac{l(2Y_C - F)}{2}$ Données utiles pour la suite : $y_1(l) = \frac{l^3}{6EI_{g_z}} (5Y_C - 2F)$ $y_1'(l) = \frac{l^2}{2EI_{g_z}} (3Y_C - F)$	$y_2(l) = \frac{1}{EI_{g_z}} \left[l^3 \frac{5Y_C}{6} + k^1_2 l + k^2_2 \right]$ $y_2'(l) = \frac{1}{2EI_{g_z}} [3Y_C l^2 + 2k^1_2]$ $\frac{l^3}{6EI_{g_z}} (5Y_C - 2F) = \frac{1}{EI_{g_z}} \left[l^3 \frac{5Y_C}{6} + k^1_2 l + k^2_2 \right]$ $\frac{1}{2EI_{g_z}} [3Y_C l^2 + 2k^1_2] = \frac{l^2}{2EI_{g_z}} (3Y_C - F)$ $k^2_2 = \frac{Fl^3}{6}$ $k^1_2 = \frac{-Fl^2}{2}$ $EI_{g_z} y_2(x) = -x^3 \frac{Y_C}{6} + x^2 l Y_C - \frac{Fl^2}{2} x + \frac{Fl^3}{6}$
---	---

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) \forall x \in]0, l[\\ y_2(x) \forall x \in]l, 2l[\end{cases}$$

• **Nouvelle équation – Compatibilité des déplacements**

$$y(2l) = y_2(2l) = 0$$

$$EI_{g_z} y_2(2l) = -8l^3 \frac{Y_C}{6} + 4l^2 l Y_C - \frac{Fl^2}{2} 2l + \frac{Fl^3}{6}$$

$$y_2(2l) = \frac{l^3}{6EI_{g_z}} (16Y_C - 5F)$$

$$\frac{l^3}{6EI_{g_z}} (16Y_C - 5F) = 0$$

Soit :

$$16Y_C - 5F = 0$$

• **Equations et résolution**

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A - F + Y_C = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A - Fl + 2lY_C = 0 \\ 16Y_C - 5F = 0 \end{cases}$$

$Y_C = \frac{5}{16} F$	$Y_A = F - \frac{5}{16} F = \frac{11}{16} F$	$N_A = Fl - 2l \frac{5}{16} F = \frac{6}{16} Fl$
	$Y_A = \frac{11}{16} F$	$N_A = \frac{3}{8} Fl$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

• **Obtention de la déformation en un point si nécessaire**

Flèche de la poutre en B :

$$y_2(x) = \frac{1}{EI_{g_z}} \left[-x^3 \frac{Y_C}{6} + x^2 l Y_C - \frac{Fl^2}{2} x + \frac{Fl^3}{6} \right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI_{g_z}} \left[-x^3 \frac{5}{16} F + x^2 l \frac{5}{16} F - \frac{Fl^2}{2} x + \frac{Fl^3}{6} \right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI_{g_z}} \left[-x^3 \frac{5F}{96} + x^2 l \frac{30}{96} F - \frac{48Fl^2}{96} x + \frac{16Fl^3}{96} \right]$$

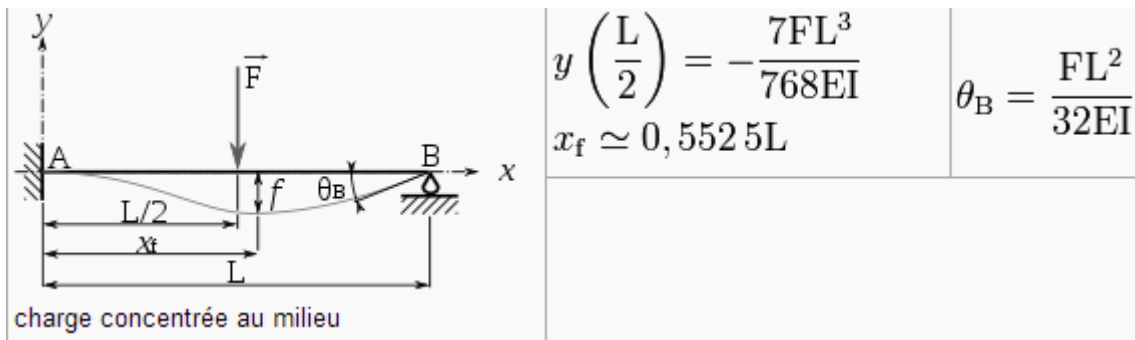
$$y_2(x) = \frac{F}{96EI_{g_z}} [-5x^3 + 30lx^2 - 48l^2x + 16l^3]$$

$$y_2(l) = \frac{Fl^3}{96EI_{g_z}} [-5 + 30 - 48 + 16]$$

$$y_2(l) = -\frac{7Fl^3}{96EI_{g_z}}$$

$$y_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{7FL^3}{768EI_{g_z}}$$

Résultat des formulaires : [Lien](#)



A.VII.4 Remarque

Les problèmes hyperstatiques faisant intervenir plusieurs actions extérieures, il est souvent possible d'utiliser le principe de superposition afin de simplifier les calculs.