Etude des solides déformables globalement

COURS

Programme - Compétences		
B214	MODELISER	· Solide déformable globalement en petites déformations (modèle poutre droite) : - Hypothèses de comportement (isotropie, homogénéité) ; - Loi de déformation élastique linéaire.
B218	MODELISER	Modélisation géométrique du déplacement des points d'un solide déformable · Hypothèse de Navier Bernoulli ; · Hypothèse des petits déplacements : torseur des petits déplacements d'une section droite ; · Torseur des déformations.
B222	MODELISER	Modélisation des actions intérieures à un solide (torseur de cohésion) · Équations d'équilibre global et local ; · Modélisation du champ de contraintes locales ; · Champ des contraintes dans une section droite ; · Hypothèse de Barré-de Venant.
C12	RESOUDRE	Hyperstatisme : choisir un modèle et une méthode de résolution et déterminer les actions mécaniques désirées
C13	RESOUDRE	Contraintes · Relations entre contraintes et composantes du torseur de cohésion.
C14	RESOUDRE	· Déplacements des points de la ligne moyenne d'une poutre : - Théorème de superposition, - Lois de comportement.

A. Etude des solides déformables globalement 7

A.I. Objectifs 7

A.II. Poutres 7

A.II.1 Définitions 7
A.II.2 Exemples 9
A.II.3 Hypothèses 9
A.II.3.a Géométrie 10
A.II.3.b Matériau 10
A.II.3.c Déformations 10
A.II.3.d Conditions aux limites - Saint Venant 10
A.II.3.e Hypothèse de Navier-Bernoulli 10
A.II.4 Propriétés géométriques des sections droites 10
A.II.4.a Préliminaires 11
A.II.4.b Centre G d'une surface 11
A.II.4.b.i Moment statique 11
A.II.4.b.ii Coordonnées du centre G 12
A.II.4.b.iii Remarques 13
A.II.4.b.iv Exemple 13
A.II.4.c Moments quadratiques polaires et produit 14
A.II.4.c.i Définitions 14
A.II.4.c.ii Remarques 14
A.II.4.c.iii Moments quadratiques par rapport à G 15
A.II.4.c.iv Exemples 15
A.II.4.c.v Théorème de Huygens 16
- Théorème 16
- Démonstration : 17
- Application 17

A.III. Poutres et milieu extérieur 18

A.III.1 Liaisons 18
A.III.2 Actions extérieures 19
A.III.2.a Efforts concentrés 19
A.III.2.b Champs linéiques d'effort 20

A.IV. Torseur de cohésion – Torseur des efforts intérieurs 21

A.IV.1 Définition 21
A.IV.2 Eléments de réduction du torseur de cohésion 22
A.IV.3 Tronçons de poutre - Définition 23
A.IV.4 Méthode générale de calcul du torseur de cohésion 23
A.IV.4.a Méthode 23
A.IV.4.a.i Présence d'un tronçon 24
A.IV.4.a.ii Présence de plusieurs tronçons 26
- Détermination des actions extérieures 26
- Tronçon 1 27
- Tronçon 2 27

A.IV.5 Diagrammes des sollicitations 28
A.IV.5.a Définition 28
A.IV.5.b Application 29
A.IV.5.b.i Exemple 1 29

A.IV.5.b.ii Exemple 2 30
A.IV.6 Continuité des sollicitations 31
A.IV.6.a Point de continuité 31
A.IV.6.a.i Schéma 31
A.IV.6.a.ii En termes d'effort 31
A.IV.6.a.iii En termes de moment 32
A.IV.6.a.iv Bilan 33
A.IV.6.b Point de discontinuité 33
A.IV.6.b.i Schéma 33
A.IV.6.b.ii En termes d'effort 34
A.IV.6.b.iii En termes de moment 34
A.IV.6.b.iv Bilan 35
A.IV.7 Découpage d'une poutre en tronçons 35
A.IV.8 Actions linéiques et torseurs de cohésion 37

A.V. Contraintes et déformations 37
A.V.1 Contraintes internes 37
A.V.1.a Vecteur contrainte 37
A.V.1.b Types de contraintes 38
A.V.1.c Lien avec le torseur de cohésion 39
A.V.2 Déformations 39
A.V.2.a Hypothèses 40
A.V.2.b Torseur des petits déplacements des points d'une section 41
A.V.2.c Torseur des petites déformations 42
A.V.2.c.i Définitions 42
A.V.2.c.ii Détermination 42
• Objectif 42
• Déformation de la poutre avant $\boldsymbol{x}$ 43
• Déformation de l'élément de longueur $\boldsymbol{dx}$ 44
• Expression de la déformation $\boldsymbol{P1'P1''}$ 45
• Déformation locale 45
A.V.2.c.iii Expression 46
A.V.3 Linéarité des contraintes et déformations au chargement 46
A.V.4 Liens entre contraintes et déformations 47
A.V.4.a Contraintes normales 47
A.V.4.a.i Essai de traction 47
A.V.4.a.ii Analyse d'un essai piloté en déplacement 48
• Courbe Contrainte/Déformation 48
• Domaine élastique 48
• Domaine plastique 48
• Striction 49
• Rupture 49
A.V.4.a.iii Loi de Hooke 49
A.V.4.a.iv Modules d'Young et limite élastique de matériaux classiques 49
A.V.4.a.v Déformation transversale 49
A.V.4.b Contraintes tangentielles 51
A.V.4.b.i Observations 51
A.V.4.b.ii Loi de Hooke en cisaillement 51
A.V.4.b.iii Modules de Coulomb de matériaux classiques 52

A.V.4.c Conclusion 52
A.V.5 Contraintes limites dans un matériau 53
A.V.5.a Contrainte normale 53
A.V.5.b Contrainte tangentielle 54

A.VI. Les sollicitations 55
A.VI.1 La traction-compression 55
A.VI.1.a Définition 55
A.VI.1.b Déplacements 55
A.VI.1.c Déformations 56
A.VI.1.c.i Torseur des déformations 56
A.VI.1.c.ii Déformation d'une poutre 56
A.VI.1.d Contraintes 57
A.VI.1.d.i Contrainte locale 57
A.VI.1.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation 57
A.VI.1.d.iii Répartition des contraintes dans une section 57
A.VI.1.e Relation Déformation-Sollicitation 58
A.VI.1.f Dimensionnement d'une poutre à la Traction-Compression 58
A.VI.1.f.i Dimensionnement à la contrainte limite 58
A.VI.1.f.ii Dimensionnement au déplacement 58
A.VI.1.g Remarque – Structures treillis 59
A.VI.2 Le cisaillement 61
A.VI.2.a Définition 61
A.VI.2.b Déplacements 62
A.VI.2.c Déformations 62
A.VI.2.c.i Torseur des déformations 62
A.VI.2.c.ii Déformation d'une poutre 62
A.VI.2.d Contraintes 63
A.VI.2.d.i Contrainte locale 63
A.VI.2.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation 63
A.VI.2.d.iii Répartition des contraintes dans une section 63
A.VI.2.e Relation Déformation-Sollicitation 63
A.VI.2.f Dimensionnement d'une poutre au cisaillement 65
A.VI.3 La torsion 65
A.VI.3.a Définition 65
A.VI.3.b Déplacements 65
A.VI.3.c Déformations 66
A.VI.3.c.i Torseur des déformations 66
A.VI.3.c.ii Déformation d'une poutre 67
A.VI.3.d Contraintes 68
A.VI.3.d.i Contrainte locale 68
A.VI.3.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation 68
A.VI.3.d.iii Répartition des contraintes dans une section 69
A.VI.3.e Relation Déformation-Sollicitation 70
A.VI.3.f Dimensionnement d'une poutre à la torsion 70
A.VI.3.f.i Dimensionnement à la contrainte limite 70
A.VI.3.f.ii Dimensionnement à la rotation 70
A.VI.4 La flexion 70
A.VI.4.a Définition 70
A.VI.4.b Déplacements 70

A.VI.4.c Déformations 71
A.VI.4.c.i Torseur des déformations 71
A.VI.4.c.ii Déformation d'une poutre 72
A.VI.4.d Contraintes 72
A.VI.4.d.i Contrainte locale 72
A.VI.4.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation 72
A.VI.4.d.iii Répartition des contraintes dans une section 73
A.VI.4.e Relation Déformation-Sollicitation 73
A.VI.4.f Calcul de la déformée d'une poutre 74
A.VI.4.g Dimensionnement d'une poutre à la flexion 74
A.VI.4.g.i Dimensionnement à la contrainte 74
A.VI.4.g.ii Dimensionnement à la flèche maximale 74
A.VI.4.h Remarque 74
A.VI.5 Tronçons de poutres et continuité 75
A.VI.6 Sollicitations composées 75
A.VI.6.a Cas des contraintes normales 75
A.VI.6.b Cas des contraintes tangentielles 75
A.VI.7 Principe de superposition 76
A.VI.8 Bilan 78

A.VII. Les problèmes hyperstatiques 79
A.VII.1 Introduction 79
A.VII.2 Méthode de résolution 79
A.VII.3 Applications 80
A.VII.3.a Traction-Compression 80
- H, hyperstatisme, liaison « en trop » et inconnue statique associée : 80
- Isolement 80
- Sollicitation et déformation liée à l'hyperstatisme 81
- Relation géométrique imposée par la liaison « en trop » 81
- Inconnues statiques en fonction d'une autre 81
- Torseur de cohésion 81
- Problème isostatique associé 81
- Equation de la déformée 82
- Nouvelle équation – Compatibilité des déplacements 82
- Equations et résolution 82
- Obtention de la déformation en un point si nécessaire 82

A.VII.3.b Flexion 83
- H, hyperstatisme, liaison « en trop » et inconnue statique associée : 83
- Isolement 83
- Sollicitation et déformation liée à l'hyperstatisme 83
- Relation géométrique imposée par la liaison « en trop » 83
- Inconnues statiques en fonction d'une autre 84
- Torseur de cohésion 84
- Problème isostatique associé 84
- Equation de la déformée 84
- Nouvelle équation – Compatibilité des déplacements 85
- Equations et résolution 85
- Obtention de la déformation en un point si nécessaire 86

A.VII.4 Remarque 86

A.VIII. Cas particuliers 87

A.VIII.1 Les concentrations de contrainte 87

A.VIII.1.a Introduction 87

A.VIII.1.b Facteur de concentration de contrainte 87

A.VIII.1.c Concentration de contrainte pour un arbre épaulé 88

A.VIII.1.c.i Cas de la traction 88

A.VIII.1.c.ii Cas de la flexion 88

A.VIII.1.c.iii Cas de la torsion 89

A.VIII.2 Le flambage ou flambement 89

A. Etude des solides déformables globalement

A.I. Objectifs

Toute pièce réelle est déformable dans un domaine spécifique et peut être détériorée lorsque les contraintes qu'elle subit dépassent une valeur critique. Ce chapitre a pour but d'introduire l'analyse de poutres en résistance des matériaux dans le but de les dimensionner afin de répondre à un cahier des charges, selon des critères de déformation et/ou de dégradation en fonction de leur chargement extérieur.

Dans ce chapitre, les pièces seront donc considérées déformables, et les mécanismes composés de plusieurs poutres seront dénommées structures. La résistance des matériaux s'insère dans un domaine d'étude plus vaste dénommé « élasticité » ou « mécanique des milieux continus ». En RDM, la théorie développée est simple car elle repose sur un nombre important d'hypothèses portant sur

- Le type de solide déformé
- Le champ des déplacements
- La modélisation des efforts

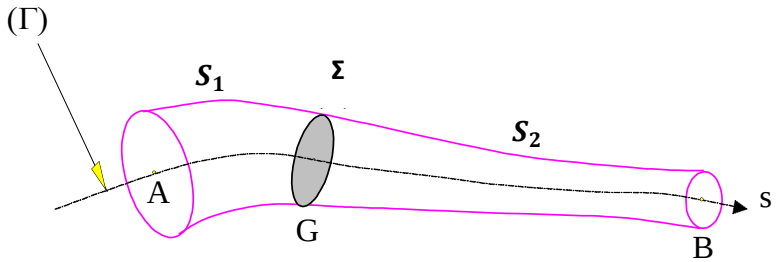
D'un point de vue expérimental, l'extensométrie et la photoélasticité dont des moyens d'investigation des déformations des structures.

Pour des pièces de forme complexe, les hypothèses de ce chapitre ne peuvent s'appliquer et il faudra faire appel à des logiciels basés sur la méthode des éléments finis par exemple.

A.II. Poutres

A.II.1 Définitions

Le solide élémentaire étudié en RDM s'appelle une poutre. C'est un solide dont la dimension longitudinale est importante devant les dimensions transversales. Une structure est un assemblage de poutres, reliées par des liaisons.



Une poutre est le solide engendré par une surface plane Σ dont le centre de gravité G décrit une portion de courbe Γ orientée par son abscisse curviligne s (par exemple de A vers B).

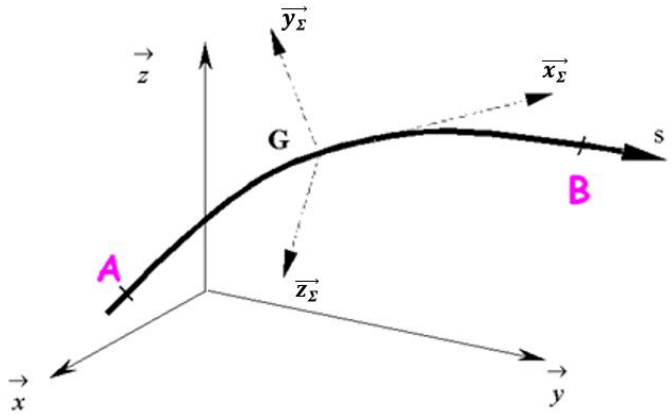
Une poutre est représentée par une ligne.

La section Σ reste toujours perpendiculaire à Γ.

- s est l'abscisse curviligne du point G
- A est l'origine de la poutre
- B est l'extrémité de la poutre
- Γ est la ligne moyenne de la poutre
- Σ est la section droite de la poutre en G, son centre
- S est la poutre
- $\overline{S}$ sont les éléments du milieu extérieur
- S_1 est la partie de la poutre définie par l'ensemble des points d'abscisse inférieure ou égale à s.
- S_2 est la partie de la poutre définie par l'ensemble des points d'abscisse supérieure ou égale à s.

Le repère général $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère fixe, lié au bâti du mécanisme par exemple. Il joue un rôle dans la détermination des efforts sur la poutre. Il ne doit toutefois pas être confondu avec le repère local de la poutre au point G, $(G,\overrightarrow{x_\Sigma},\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma})$, orthonormé, défini en tout point G de la ligne moyenne, tel que :

- $\overrightarrow{x_\Sigma}=\frac{d\overrightarrow{OG}}{ds}$, tangent à Γ en G
- $\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes principaux d'inertie de la section Γ en G. Ce sont en général les directions associées aux axes de symétrie pour les sections couramment fabriquées.

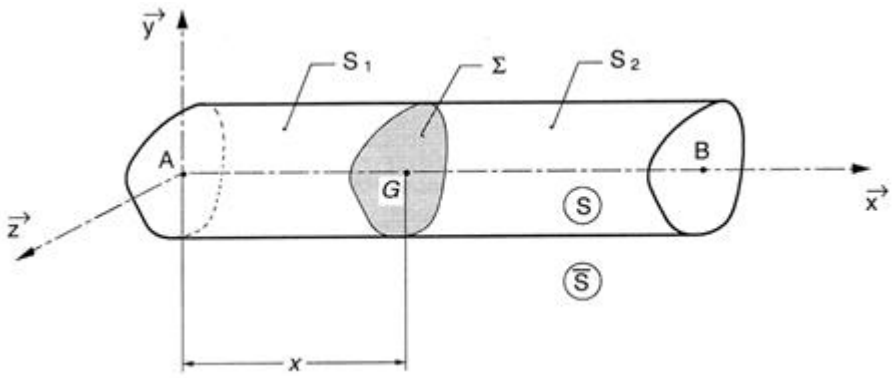


Il existe différents types de poutres que l'on peut classer selon:

- la forme de Γ : droite, plane
- l'évolution de la section : constante, variable

Une poutre est dite plane si sa ligne moyenne est comprise dans un plan. Si ce plan est plan de symétrie de la poutre, on dit qu'elle est à plan médian.

Une poutre est dite droite si sa ligne moyenne est une droite. Dans ce cas, les deux bases $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $(\overrightarrow{x_\Sigma},\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma})$ ont le même vecteur $\vec{x}$ et x est l'abscisse curviligne s du point G.

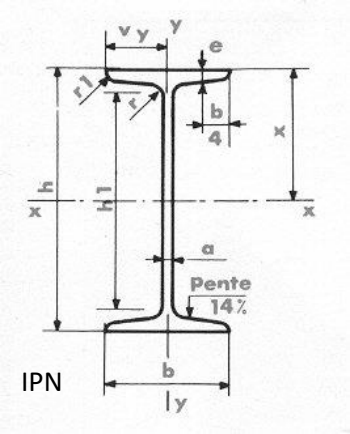


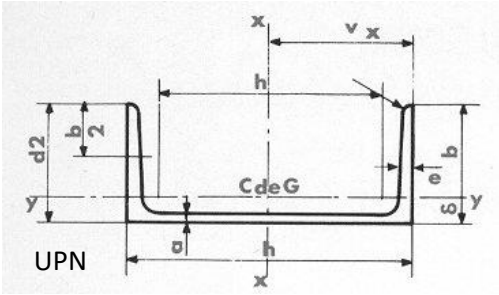
On a donc :

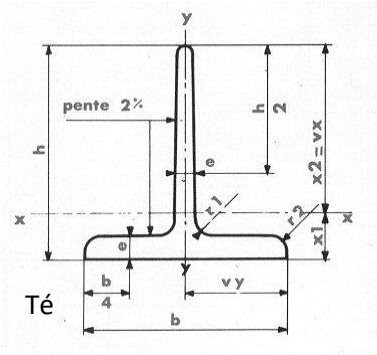
$$\overrightarrow{AG} = x\vec{x}$$

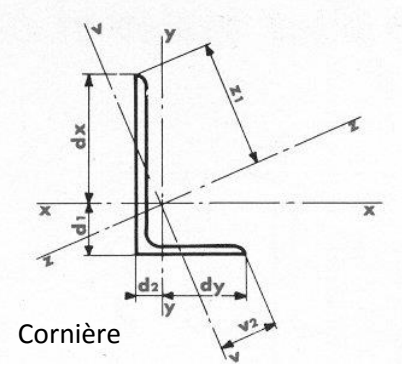
A.II.2 Exemples

Exemples de sections de profilés vendus dans le commerce :









A.II.3 Hypothèses

La résistance des matériaux est un outil simple et puissant mais présente un certain nombre d'hypothèses qu'il faut connaître.

A.II.3.a Géométrie

Il faut que les poutres respectent 3 hypothèses :

- La longueur de la poutre est grande devant les dimensions transversales (solide élancé).
- Le rayon de courbure de la ligne moyenne est grand par rapport aux dimensions de la section droite.
- Le gradient de variation de la section droite S doit être faible (pas d'épaulement par exemple).

Plus ces hypothèses seront respectées, plus les résultats seront proches de la réalité.

A.II.3.b Matériau

On suppose que les matériaux de construction des poutres possèdent les propriétés suivantes :

- Continus : discontinuités microscopiques négligées
- Homogènes : même constitution en tout point
- Isotropes : mêmes propriétés physiques dans les 3 directions de l'espace

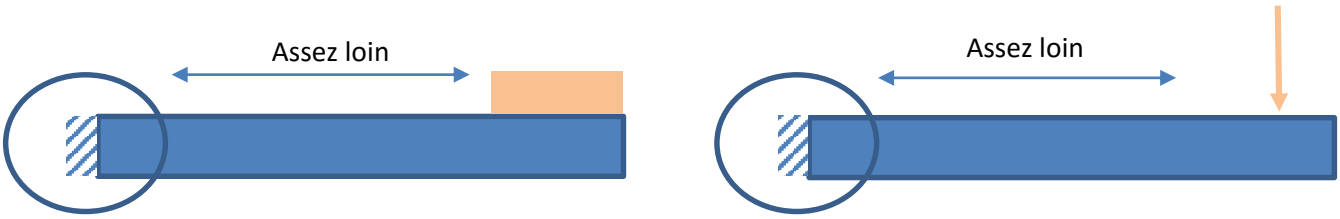
A.II.3.c Déformations

Les résultats de la théorie des poutres sont valables dans le cadre de petites déformations.

A.II.3.d Conditions aux limites - Saint Venant

L'état des sollicitations dans la section droite de centre G, dans une région suffisamment éloignée des points d'applications des charges extérieures appliquées à la poutre, ne dépend pas, pour les mêmes torseurs associés à ces charges, de la manière avec lesquelles elles sont appliquées.

Exemple :Effort ou charge répartie de même résultante



A.II.3.e Hypothèse de Navier-Bernoulli

Dans les conditions de petites déformations, les sections planes Σ, normales à la ligne moyenne avant chargement, demeurent planes et normales à la ligne moyenne après chargement (déformation).

A.II.4 Propriétés géométriques des sections droites

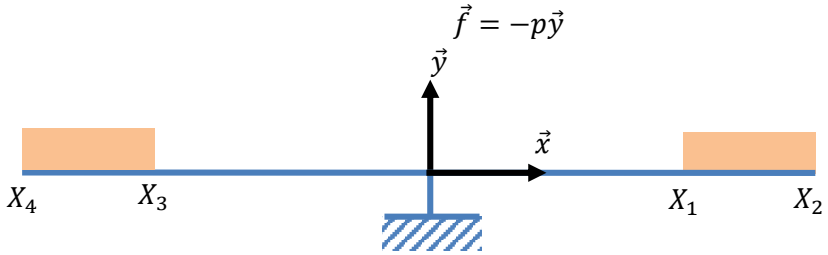
Une section droite Σ est caractérisée par ses dimensions transversales. Les grandeurs qui lui sont associées sont les caractéristiques de la section :

- Moment statique
- Position du centre de la surface
- Moments quadratiques polaires et moment produit

A.II.4.a Préliminaires

Dans cette partie, il va falloir calculer des intégrales. Attention, les bornes des intégrales doivent toujours être prises dans le sens des vecteurs de base, c'est-à-dire entre des coordonnées croissantes.

Exemple : Soit une charge répartie du type :



La résultante de cette action sur la poutre vaut :

$$\int_{X_1}^{X_2} -p\vec{y} + \int_{X_4}^{X_3} -p\vec{y}$$

A.II.4.b Centre G d'une surface

A.II.4.b.i Moment statique

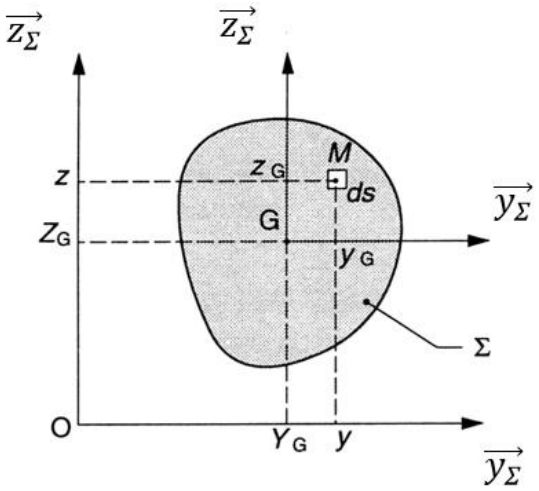
Une section de poutre est repérée par ses vecteurs de base $(\overrightarrow{y_\Sigma}, \overrightarrow{z_\Sigma})$. Son centre G est repéré à l'aide des coordonnées Y_G et Z_G par rapport à un point O quelconque telles que :

$$\overrightarrow{OG} = Y_G\overrightarrow{y_\Sigma} + Z_G\overrightarrow{z_\Sigma}$$

Un point quelconque M de Σ est repéré par :

$$\overrightarrow{OM} = y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma} = (Y_G + y_G)\overrightarrow{y_\Sigma} + (Z_G + z_G)\overrightarrow{z_\Sigma}$$

y_G et z_G sont donc les coordonnées de M dans le repère $(G, \overrightarrow{y_\Sigma}, \overrightarrow{z_\Sigma})$.



L'élément de surface autour de M est noté dS.

On définit le moment statique $A(O,\overrightarrow{y_\Sigma})$ de la surface Σ, par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{y_\Sigma})$ par :

$$A(O,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \int_\Sigma z dS$$

On définit le moment statique $A(O,\overrightarrow{z_\Sigma})$ de la surface Σ, par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_\Sigma)$ par :

$$A(O,\vec{z}_\Sigma) = \int_\Sigma y dS$$

Un moment statique s'exprime en m^3.

A.II.4.b.ii Coordonnées du centre G

On appelle centre de la surface Σ le point unique G défini par la relation :

$$\int_\Sigma \overrightarrow{GM} dS = \vec{0}$$

Soit :

$$\int_\Sigma y_G dS = 0$$

$$\int_\Sigma z_G dS = 0$$

De plus, on montre que : $\int_\Sigma \overrightarrow{OM} dS = S\overrightarrow{OG}$

Démonstration :

$$\int_\Sigma \overrightarrow{OM} dS = \int_\Sigma (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) dS = \int_\Sigma \overrightarrow{OG} dS + \int_\Sigma \overrightarrow{GM} dS = \int_\Sigma \overrightarrow{OG} dS = \overrightarrow{OG} \int_\Sigma dS = S\overrightarrow{OG}$$

D'où :

$$SY_G = \int_\Sigma y dS = A(O,\vec{z}_\Sigma)$$

$$SZ_G = \int_\Sigma z dS = A(O,\vec{y}_\Sigma)$$

Ou encore :

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_\Sigma y dS = \frac{1}{S} A(O,\vec{z}_\Sigma)$$

$$Z_G = \frac{1}{S}\int_\Sigma z dS = \frac{1}{S} A(O,\vec{y}_\Sigma)$$

A.II.4.b.iii Remarques

- S'il existe un ou plusieurs axes de symétrie pour la surface étudiée, le centre se trouve sur ces axes.
    - S'il y a 2 axes de symétrie, G est à leur intersection.
    - S'il y a un seul axe de symétrie, et si celui-ci contient $\overrightarrow{y_\Sigma}$ ou $\overrightarrow{z_\Sigma}$, on aura respectivement $A(G,\vec{z}_\Sigma)=0$ ou $A(G,y_\Sigma)=0$, il suffira alors de calculer l'autre moment statique.
- Lorsque l'on connaît le centre de différentes portions Σ_1, Σ_2, …, Σ_n de Σ telles que

$$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\ldots\cup\Sigma_n$$

$$\Sigma_i\cap\Sigma_j=\emptyset\ \forall i\neq j$$

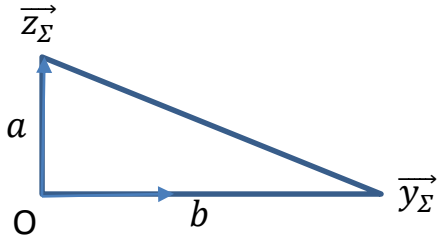
On a alors :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{S_1\overrightarrow{OG_1}+S_2\overrightarrow{OG_2}+\cdots+S_n\overrightarrow{OG_n}}{S_1+S_2+\cdots+S_n}$$

Remarque : S'il existe i et j tels que $\Sigma_i\cap\Sigma_j\neq\emptyset$, la démarche sera applicable en considérant en plus de tous les calculs précédents la partie commune avec une surface négative.

A.II.4.b.iv Exemple

Soit une section triangulaire :



On ne voit aucun axe de symétrie.

On pose O arbitrairement. Soit un point M courant tel que $\overrightarrow{OM}=y\overrightarrow{y_\Sigma}+z\overrightarrow{z_\Sigma}$

$$S=\frac{ab}{2}$$

$$dS=dydz$$

$$y_G=\frac{1}{S}\int_\Sigma ydS=\frac{2}{ab}\int_{y=0}^{b}\left[\int_{z=0}^{a-\frac{a}{b}y}dz\right]ydy=\frac{2}{ab}\int_0^b\left[a-\frac{a}{b}y\right]ydy=\frac{2}{ab}\int_0^b\left[ay-\frac{a}{b}y^2\right]dy$$

$$y_G=\frac{2}{ab}\left[a\frac{b^2}{2}-\frac{a}{b}\frac{b^3}{3}\right]=\frac{2}{b}\left[\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{3}\right]=\frac{2}{b}\left[\frac{3b^2-2b^2}{6}\right]=\frac{b}{3}$$

$$z_G=\frac{1}{S}\int_\Sigma zdS=\frac{2}{ab}\int_{z=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{b-\frac{b}{a}z}dy\right]zdz=\frac{2}{ab}\int_0^a\left[b-\frac{b}{a}z\right]zdz=\frac{2}{ab}\int_0^a\left[bz-\frac{b}{a}z^2\right]dz$$

$$z_G = \frac{2}{ab}\left[b\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a}\frac{a^3}{3}\right] = \frac{a}{3}$$

A.II.4.c Moments quadratiques polaires et produit

A.II.4.c.i Définitions

Le moment quadratique $I(O,\vec{y}_\Sigma)$ de la surface Σ par rapport à l'axe $(O,\vec{y}_\Sigma)$ est défini par :

$$I(O,\vec{y}_\Sigma) = I_{O_{y_\Sigma}} = \int_\Sigma z^2 dS$$

Le moment quadratique $I(O,\vec{z}_\Sigma)$ de la surface Σ par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_\Sigma)$ est défini par :

$$I(O,\vec{z}_\Sigma) = I_{O_{z_\Sigma}} = \int_\Sigma y^2 dS$$

Le moment quadratique polaire $I(O)$ de la surface Σ est défini par :

$$I(O) = I_O = \int_\Sigma (y^2+z^2) dS = I(O,\vec{y}_\Sigma) + I(O,\vec{z}_\Sigma)$$

Le moment produit $I(O,\vec{y}_\Sigma,\vec{z}_\Sigma)$ de la surface Σ par rapport aux axes $(O,\vec{y}_\Sigma)$ et $(O,\vec{z}_\Sigma)$ de son plan est défini par :

$$I(O,\vec{y}_\Sigma,\vec{z}_\Sigma) = \int_\Sigma yz dS$$

Un moment quadratique s'exprime en m^4.

A.II.4.c.ii Remarques

- Si $(O,\vec{y}_\Sigma)$ et $(O,\vec{z}_\Sigma)$ sont orthogonaux
  - si l'un d'eux est axe de symétrie de Σ
    $$I(O,\vec{y}_\Sigma,\vec{z}_\Sigma) = 0$$
  - si $(O,\vec{y}_\Sigma)$ est axe de symétrie de Σ
    $$\forall M \epsilon (O,\vec{y}_\Sigma), I(M,\vec{y}_\Sigma) = I(O,\vec{y}_\Sigma)$$
  - si (O,z_Σ) est axe de symétrie de Σ
    $$\forall M \epsilon (O,\vec{z}_\Sigma), I(M,\vec{z}_\Sigma) = I(O,\vec{z}_\Sigma)$$
- Dans le cas de surfaces présentant une géométrie cylindrique, pensez à passer par les coordonnées cylindriques

$$\int_\Sigma (y^2+z^2) dS = \int_\Sigma r^2 dS$$

$$\int_\Sigma y^2 dS = \int_\Sigma z^2 dS = \frac{1}{2}\int_\Sigma r^2 dS$$

A.II.4.c.iii Moments quadratiques par rapport à G

Dans la suite, ce seront majoritairement les moments quadratiques des sections droites des poutres par rapport à des axes passant par le centre G qui nous intéresseront.

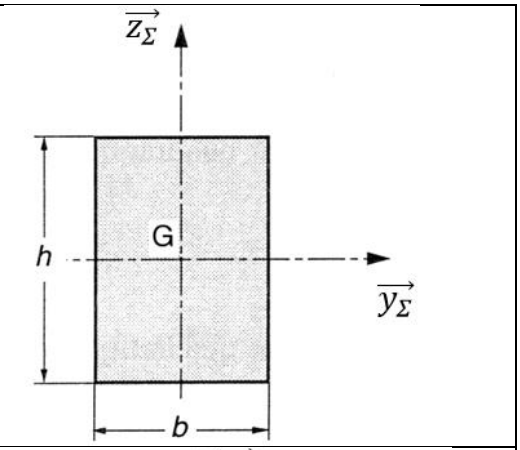
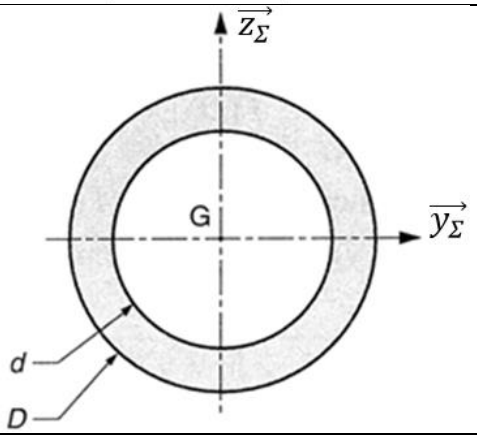
Ils seront donc notés :

$$I(G,\vec{y}_\Sigma) - I(G,\vec{z}_\Sigma) - I(G)$$

Il sera donc nécessaire, dans un premier temps, de déterminer la position de G par rapport à un point O arbitrairement choisi, puis :

- soit de faire les intégrales dans le repère centré sur G
- soit de faire, dans le cas de présence de symétries, et uniquement pour les moments quadratiques concernés, les intégrales centrées en un point A tel que
  - si $(G,\vec{y}_\Sigma)$ est axe de symétrie de Σ, A est quelconque sur l'axe $(G,\vec{y}_\Sigma)$ pour le calcul de $I(G,\vec{y}_\Sigma)$
  - si $(G,\vec{z}_\Sigma)$ est axe de symétrie de Σ, A est quelconque sur l'axe $(G,\vec{z}_\Sigma)$ pour le calcul de $I(G,\vec{z}_\Sigma)$
- soit de faire les intégrales en O et d'utiliser le théorème de Huygens

A.II.4.c.iv Exemples

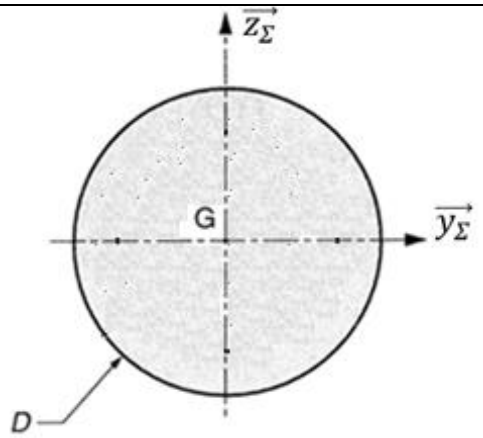
$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \frac{bh^3}{12}$ $I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \frac{hb^3}{12}$ $I(G) = \frac{hb(h^2+b^2)}{12}$ $I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = 0$	
$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$ $I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$ $I(G) = \frac{\pi(D^4-d^4)}{32}$ $I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = 0$	

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I(G) = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = 0$$



Démonstrations :

G est à l'intersection de 2 axes de symétrie.

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \int_\Sigma z^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dydz = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \int_\Sigma y^2 dS = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dydz = h\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I(G) = I(G,\vec{y}_\Sigma) + I(G,\vec{z}_\Sigma) = \frac{hb(h^2+b^2)}{12}$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} yzdydz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} ydy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zdz = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$$

$$I(G,\vec{y},\vec{z}) = 0$$

G est à l'intersection de tout axe de symétrie passant au centre du cercle.

$$\int_\Sigma (y^2+z^2)dS = \int_\Sigma r^2 dS$$

$$\int_\Sigma y^2 dS = \int_\Sigma z^2 dS = \frac{1}{2}\int_\Sigma r^2 dS$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \frac{1}{2}\int_\Sigma r^2 dS = \frac{1}{2}\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^2 dS = \frac{1}{2}\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^2 r dr d\theta = \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}}$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \pi\frac{\frac{D^4}{16}-\frac{d^4}{16}}{4} = \frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$$

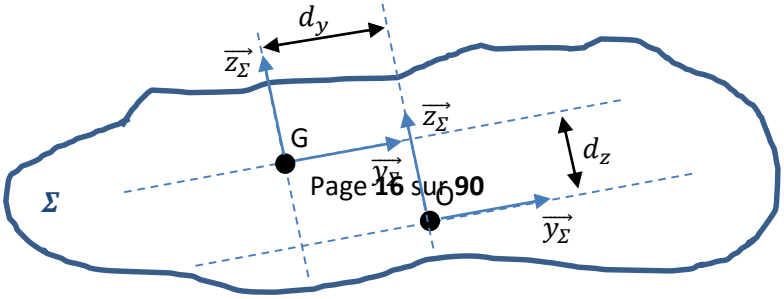
$$I(G) = I(G,\vec{y}_\Sigma) + I(G,\vec{z}_\Sigma) = \frac{\pi(D^4-d^4)}{32}$$

Pour le cylindre creux, il suffit de prendre $d = 0$

A.II.4.c.v Théorème de Huygens

- **Théorème**

Soit S la surface de la section Σ d'une poutre.



Soient deux axes parallèles $(O,\vec{y}_\Sigma)$ et $(G,\vec{y}_\Sigma)$ et d_z la distance entre ces 2 axes, alors :

$$I(O,\vec{y}_\Sigma) = I(G,\vec{y}_\Sigma) + S{d_z}^2 = I(G,\vec{y}_\Sigma) + S\left(\overrightarrow{GO}.\vec{z}_\Sigma\right)^2$$

Soient deux axes parallèles $(O,\vec{z}_\Sigma)$ et $(G,\vec{z}_\Sigma)$ et d_y la distance entre ces 2 axes, alors :

$$I(O,\vec{z}_\Sigma) = I(G,\vec{z}_\Sigma) + S{d_y}^2 = I(G,\vec{z}_\Sigma) + S\left(\overrightarrow{GO}.\vec{y}_\Sigma\right)^2$$

- **<u>Démonstration :</u>**

$$\overrightarrow{OM}.\vec{z}_\Sigma = z = \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right).\vec{z}_\Sigma = z_G + Z_G$$

$$I(O,\vec{y}_\Sigma) = \int_\Sigma z^2 dS = \int_\Sigma (z_G + Z_G)^2 dS = \int_\Sigma {z_G}^2 dS + {Z_G}^2 \int_\Sigma dS + 2Z_G \int_\Sigma z_G dS$$

$$I(O,\vec{y}_\Sigma) = I(G,\vec{y}_\Sigma) + S{Z_G}^2$$

Car $\int_\Sigma z_G dS$ est l'intégrale de l'ordonnée z de G dans le repère lié au point G. C'est donc l'ordonnée Z_G dans ce repère qui est nulle.

- **<u>Application</u>**

Lorsqu'une surface Σ de centre G est composée d'un ensemble de surfaces Σ_1, Σ_2, …, Σ_n telles que :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots \cup \Sigma_n$$

$$\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset \; \forall i \neq j$$

Si, pour chaque surface Σ_i, on connaît le centre G_i, la surface S^i et les moments quadratiques ${I_{G_{i_y}}}^i$ et ${I_{G_{i_z}}}^i$, on a :

$$I_{G_y} = \int_\Sigma z^2 \, dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Sigma_i} z^2 \, dS = \sum_{i=1}^{n} {I_{G_y}}^i$$

$$I_{G_z} = \int_\Sigma y^2 \, dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Sigma_i} y^2 \, dS = \sum_{i=1}^{n} {I_{G_z}}^i$$

Avec :

$${I_{G_y}}^i = {I_{G_{i_y}}}^i + S^i\left(\overrightarrow{GG_i}.\vec{z}\right)^2$$

$${I_{G_z}}^i = {I_{G_{i_z}}}^i + S^i\left(\overrightarrow{GG_i}.\vec{y}\right)^2$$

Remarque : S'il existe i et j tels que $\Sigma_i \cap \Sigma_j \neq \emptyset$, la démarche sera applicable en considérant en plus de tous les calculs précédents la partie commune et en retranchant ses caractéristiques propres.

A.III. Poutres et milieu extérieur

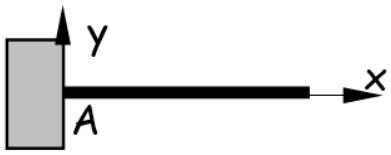
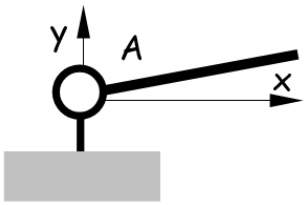
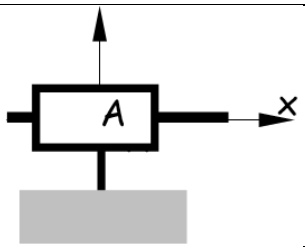
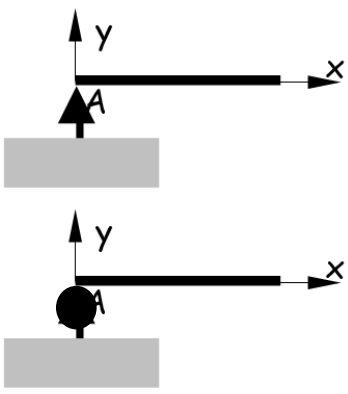
A.III.1 Liaisons

On modélise les liaisons de la poutre avec son environnement à l'aide des liaisons élémentaires définies dans le cours de modélisation des liaisons.

En résistance des matériaux, on associe aux différentes liaisons les conditions cinématiques qu'elles imposent, c'est-à-dire des positions et des orientations, soit des coordonnées et des dérivées de ces coordonnées.

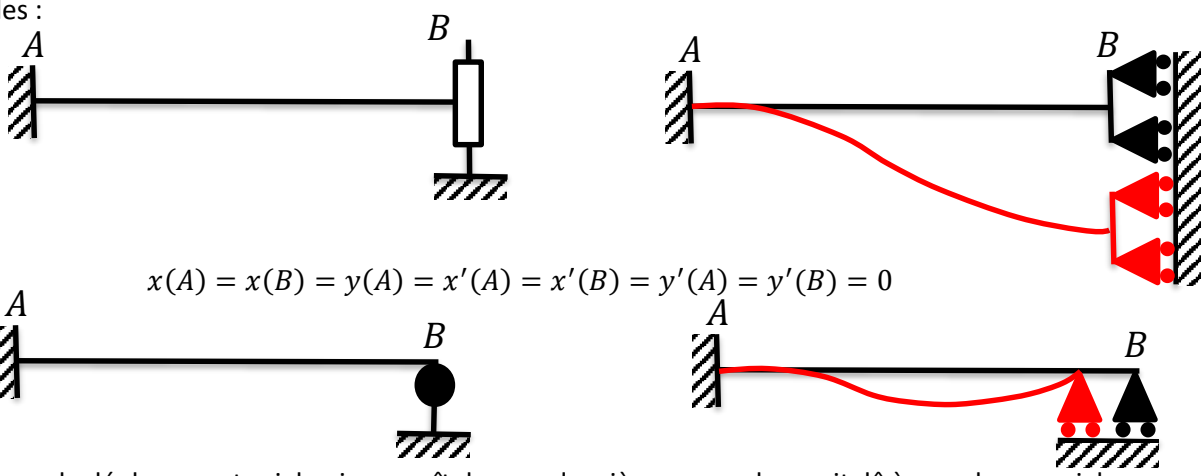
Le cas le plus souvent rencontré est le cas des poutres à plan moyen chargées dans le plan de symétrie, ceci conduit à un problème plan.

On appelle $x(M)$ et $y(M)$ les mouvements possible suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du point M de la poutre.

Type d'appui	Schéma	Conditions cinématiques
Encastrement		$x(A) = y(A) = 0$ $x'(A) = y'(A) = 0$
Pivot ou articulation		$x(A) = y(A) = 0$
Glissière		$y(A) = 0$ $y'(A) = 0$
Ponctuelle		$y(A) = 0$

On peut utiliser des petits chariots sur roulettes afin de représenter cinématiquement les déformations possibles et les conditions géométriques associées aux conditions aux limites.

Exemples :



$$x(A) = x(B) = y(A) = x'(A) = x'(B) = y'(A) = y'(B) = 0$$

Remarque : le déplacement axial qui apparaît dans ce deuxième exemple serait dû à une charge axiale. On ne considèrerait pas le déplacement axial issu d'une charge purement radiale.

$$x(A) = y(A) = x'(A) = y'(A) = y(B) = 0$$

A.III.2 Actions extérieures

Une poutre est généralement soumise à deux types d'actions extérieures :

- Des efforts et couples concentrés
- Des champs linéiques d'effort, voire de couple

Généralement, la gravité sera négligée sauf si précisé, où si les poutres sont de grandes dimensions.

A.III.2.a Efforts concentrés

Une poutre S est soumise à une action concentrée en M.

L'action $\vec{F}(\overline{S} \to S)$ concentrée en M dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ admet au maximum trois composantes non nulles :

$$\vec{F}(\overline{S} \to S) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}^B$$

Le torseur associé à cette action en un point A de l'espace tel que :

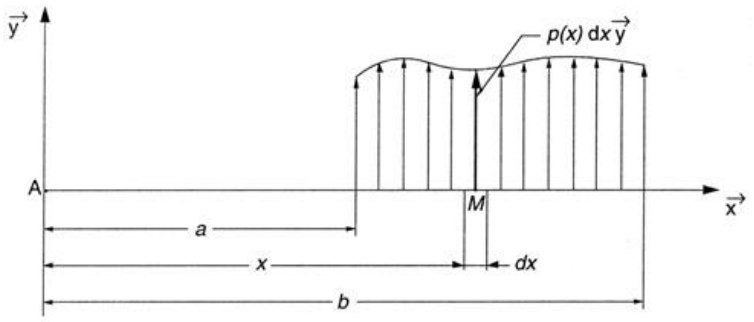
$$\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^B$$

a pour expression dans B :

$$\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to S}\} = \begin{Bmatrix} F_x & yF_z - zF_y \\ F_y & zF_x - xF_z \\ F_z & xF_y - yF_x \end{Bmatrix}^B_A$$

A.III.2.b Champs linéiques d'effort

Une distribution de charges appliquées se caractérise au niveau de la ligne moyenne de la poutre par une charge linéique $\vec{f}(x)$ pour x appartenant à un segment. Cette distribution de charge est exprimée en N/m.



Le torseur associé à l'action global de cette distribution de charge correspondant à la densité linéique d'efforts $d\vec{F}(\overline{S} \to S) = \vec{f}(x)dx = p(x)dx\vec{y}$ en un point A de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^B$$

a pour expression :

$$\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to S}\} = \left\{ \begin{matrix} \int_\Gamma d\vec{F} \\ \int_\Gamma \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \int_a^b p(x)dx & 0 \\ 0 & \int_a^b xp(x)dx \end{matrix} \right\}_A^B$$

Remarques :

- Il existe un point où le moment du torseur associé à une densité linéique d'effort est nul. En ce point, l'action globale de cette densité linéique d'effort peut être modélisée par un glisseur de moment nul.
- Afin d'obtenir des résultats factorisés dès le départ lors du calcul d'intégrales, il est intéressant de
    - Faire un changement de variable afin d'obtenir une borne nulle
    - Regrouper les termes de même degré avant d'intégrer

A.IV. Torseur de cohésion – Torseur des efforts intérieurs

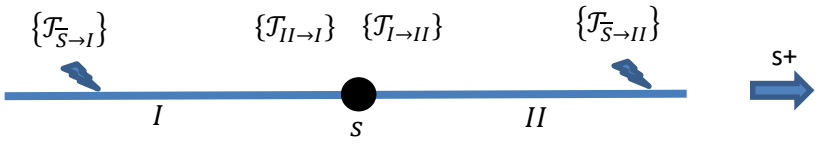
A.IV.1 Définition

La poutre étudiée S est en équilibre sous l'action des charges extérieures représentées par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_{ext\to S}\} = \left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to S}\right\} = \{0\}$$

En s, abscisse curviligne de la section en G, définissant la frontière entre les parties I et II, chaque partie est considéré encastré avec l'autre.

On note :



- $\left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to II}\right\}$ le torseur des actions extérieures sur la partie II.
- $\left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to I}\right\}$ le torseur des actions extérieures sur la partie I.

L'équilibre de la poutre s'écrit :

$$\left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to S}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to I}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to II}\right\} = \{0\}$$

On introduit le torseur des actions de II sur I à l'abscisse s par : $\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{II\to I}\}$.

L'équilibre de la partie I s'écrit :

$$\left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to I}\right\} + \{\mathcal{T}_{II\to I}\} = \{0\}$$

L'équilibre de la partie II s'écrit :

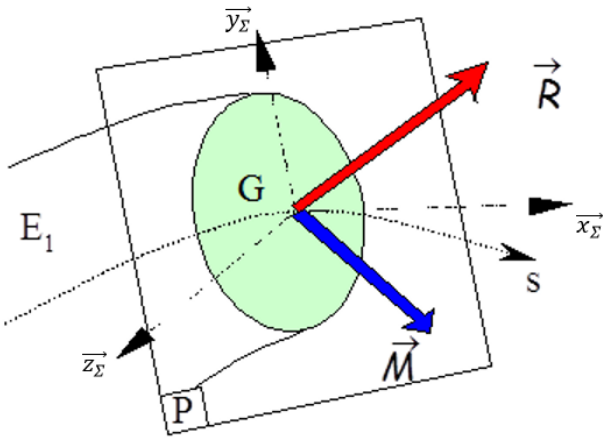
$$\left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to II}\right\} + \{\mathcal{T}_{I\to II}\} = \{0\}$$

On a donc :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{II\to I}\} = \left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to II}\right\} = -\left\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to I}\right\}$$

Ce torseur traduit la cohésion des deux parties et définit les actions élémentaires exercées par la partie II sur la partie I. On l'appelle torseur de cohésion, ou torseur des efforts/actions intérieures.

A.IV.2 Eléments de réduction du torseur de cohésion

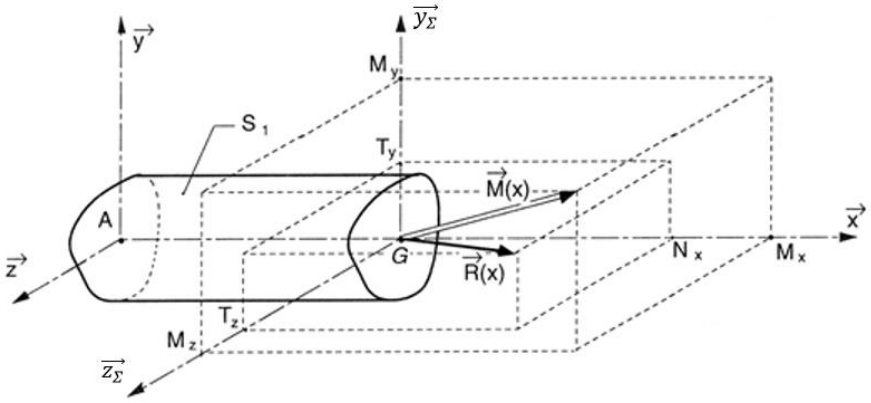


Dans une section Σ d'abscisse s, les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs $\{\mathcal{T}_C\}$ s'écrivent en G **dans la base locale $\mathcal{B}_\Sigma$.**

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} N(s) & M_t(s) \\ T_y(s) & M_{f_y}(s) \\ T_z(s) & M_{f_z}(s) \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$$

Avec

$$\begin{cases} N(s) = \vec{R}(s).\overrightarrow{x_\Sigma} \\ T_y(s) = \vec{R}(s).\overrightarrow{y_\Sigma} \\ T_z(s) = \vec{R}(s).\overrightarrow{z_\Sigma} \\ M_t(s) = \vec{M}(s).\overrightarrow{x_\Sigma} \\ M_{f_y}(s) = \vec{M}(s).\overrightarrow{y_\Sigma} \\ M_{f_z}(s) = \vec{M}(s).\overrightarrow{z_\Sigma} \end{cases}$$

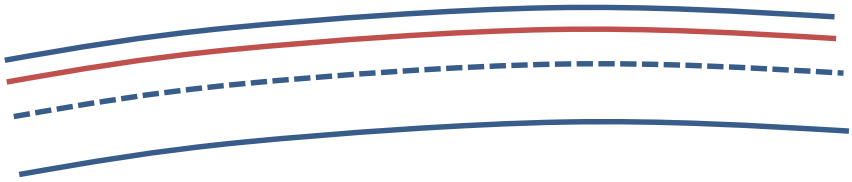


Chacune de ces sollicitations porte un nom précis :

Symbole	Nom	Sollicitation	Déformation

N	Effort normal (suivant $\overrightarrow{x_\Sigma}$)	Traction Compression	Allongement/Raccourcissement de la poutre
T_y	Effort tranchant suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$	Cisaillement	Glissement relatif des sections
T_z	Effort tranchant suivant $\vec{z}_\Sigma$	Cisaillement	
M_t	Moment de torsion	Torsion	Rotation relative des sections
M_{f_y}	Moment fléchissant suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$	Flexion	Allongement/Raccourcissement des fibres selon leur position par rapport au plan neutre Modification de la courbure de la poutre
M_{f_z}	Moment fléchissant suivant $\overrightarrow{z_\Sigma}$	Flexion	

Une fibre étant un fil de matière parallèle à la ligne moyenne :



A.IV.3 Tronçons de poutre - Définition

On définit un tronçon de poutre comme une portion de poutre dans laquelle l'expression de chacun des éléments de réductions du torseur de cohésion est une fonction de l'abscisse curviligne dont la formule ne change pas. Chaque tronçon est numéroté à l'aide d'un chiffre.

A.IV.4 Méthode générale de calcul du torseur de cohésion

A.IV.4.a Méthode

- Isoler la poutre
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieures. En général, on nomme les inconnues en un point A $X_A, Y_A, Z_A, L_A, M_A, N_A$. Attention, en cas de présence de plusieurs pièces, préférer les notations $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}$ pour des questions de signes
- Appliquer le PFS à la poutre
    - si h=0 : (optionnel) Déterminer les actions de liaison
    - Si h=1 : Exprimer les actions de liaison en fonction de l'action « en trop »
- Représenter la poutre et ses actions extérieures graphiquement en prenant garde aux signes et sens des flèches. Le mieux est de ne pas écrire de flèches au-dessus des vecteurs, d'écrire leur composante positive et d'orienter la représentation (flèche représentant couple ou effort) dans le sens du signe
- Identifier les différents tronçons de la poutre et les numéroter sur le schéma (1,2,3 …)
- Pour chaque tronçon :
    - Etablir le schéma de la poutre complète en positionnant le point M à l'abscisse désirée et les actions extérieures sur l'intégralité de la poutre
    - Identifier les parties I et II
    - Choisir la partie isolée pour déterminer $\{\mathcal{T}_C\}$
    - Faire apparaître les actions extérieures sur celle-ci
    - Déterminer le torseur de cohésion

A.IV.4.a.i Présence d'un tronçon

Soit une poutre droite encastrée soumise à un effort orthogonalement à sa ligne moyenne, un effort dans son axe et un couple autour de son axe.



$$AB = L \quad ; \quad \vec{C} = C\vec{x} \quad ; \quad \overrightarrow{F_1} = -F_1\vec{y} \quad ; \quad \overrightarrow{F_2} = -F_2\vec{x}$$

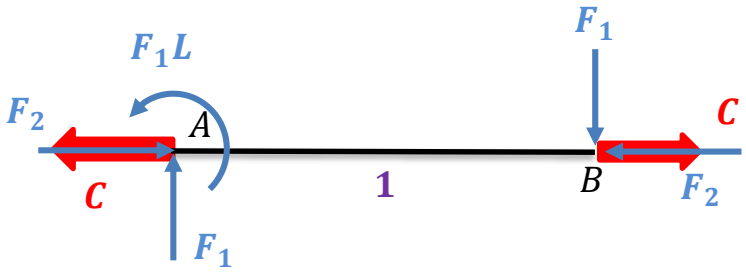
On isole S :

$$\{\mathcal{T}_{0\to S}\}+\{\mathcal{T}_{actions\to S}\}=\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & M_A\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{A}+\begin{Bmatrix}-F_2 & C\\ -F_1 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{B}=\{0\}$$

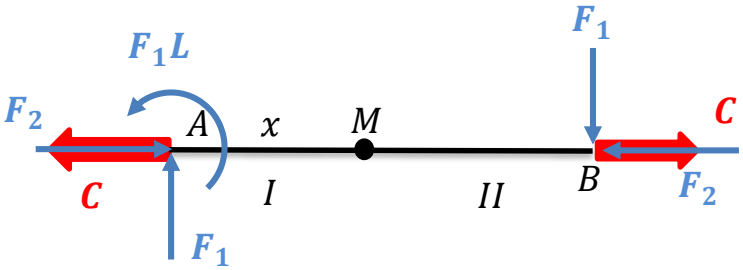
$$\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & M_A\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{A}+\begin{Bmatrix}-F_2 & C\\ -F_1 & 0\\ 0 & -F_1L\end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{A}=\{0\}$$

$$X_A=F_2 \quad - \quad Y_A=F_1 \quad - \quad Z_A=0 \quad - \quad L_A=-C \quad - \quad M_A=0 \quad - \quad N_A=F_1L$$

On refait le schéma de la poutre avec les efforts extérieurs connus et on identifie les tronçons, ici il n'y en a qu'un noté « 1 »



On étudie le seul tronçon 1, on place un point M sur ce tronçon d'abscisse x et on coupe de la poutre en 2 parties notées I et II :



Finalement, on détermine le torseur de cohésion dans le tronçon étudié :

$$\{\mathcal{T}_C\}=\{\mathcal{T}_{\overline{S}\to II}\}=\begin{Bmatrix}-F_2 & C\\ -F_1 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{B}=\begin{Bmatrix}-F_2 & C\\ -F_1 & 0\\ 0 & -F_1(L-x)\end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{M}=\begin{Bmatrix}N(x) & M_t(x)\\ T_y(x) & M_{f_y}(x)\\ T_z(x) & M_{f_z}(x)\end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{M}$$

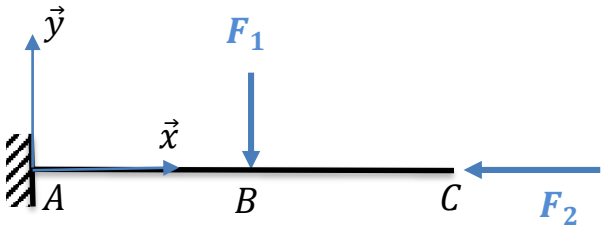
$$\begin{bmatrix}L-x\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathcal{B}}\wedge\begin{bmatrix}-F_2\\ -F_1\\ 0\end{bmatrix}^{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -F_1(L-x)\end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$$

Avec :

$$\begin{cases} N(x) = -F_2 \ \forall x \in]0;L[\\ T_y(x) = -F_1 \ \forall x \in]0;L[\\ T_z(x) = 0 \ \forall x \in]0;L[\\ M_t(x) = C \ \forall x \in]0;L[\\ M_{f_y}(x) = 0 \ \forall x \in]0;L[\\ M_{f_z}(x) = -F_1(L-x) \ \forall x \in]0;L[\end{cases}$$

A.IV.4.a.ii Présence de plusieurs tronçons

Soit une poutre droite suivante encastrée soumise à deux efforts en des points différents.



$$AB = l \quad ; \quad AC = L \quad ; \quad \overrightarrow{F_1} = -F_1\vec{y} \quad ; \quad \overrightarrow{F_2} = -F_2\vec{x}$$

- **<u>Détermination des actions extérieures</u>**

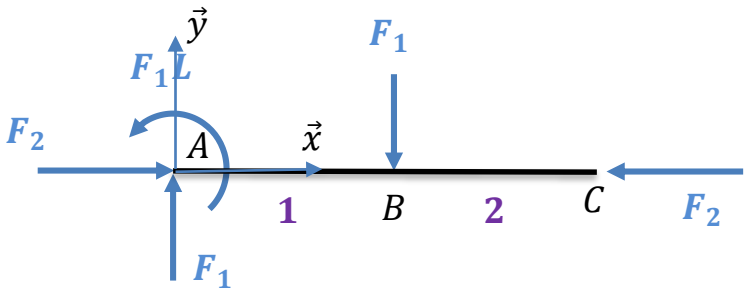
On isole S :

$$\{\mathcal{T}_{0\to S}\} + \{\mathcal{T}_{actions\to S}\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{A} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{B} + \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{C} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{A} + \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1 l \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{A} = \{0\}$$

$$X_A = F_2 \quad - \quad Y_A = F_1 \quad - \quad Z_A = 0 \quad - \quad L_A = 0 \quad - \quad M_A = 0 \quad - \quad N_A = F_1 l$$

On refait le schéma de la poutre avec les efforts extérieurs connus et on identifie les tronçons, ici y en a deux notés « 1 » et « 2 ».

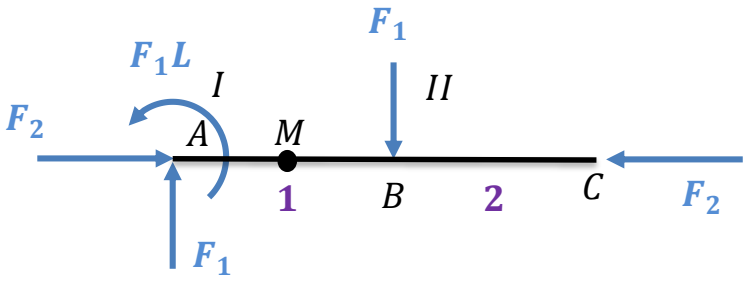


Tronçon 1 : $x\epsilon]0, l[$

Tronçon 2 : $x\epsilon]l, L[$

• **<u>Tronçon 1</u>**

On étudie le tronçon 1, on place un point M **sur ce tronçon** d'abscisse x et on coupe de la poutre en 2 parties notées I et II :



On détermine alors le torseur de cohésion dans le tronçon étudié :

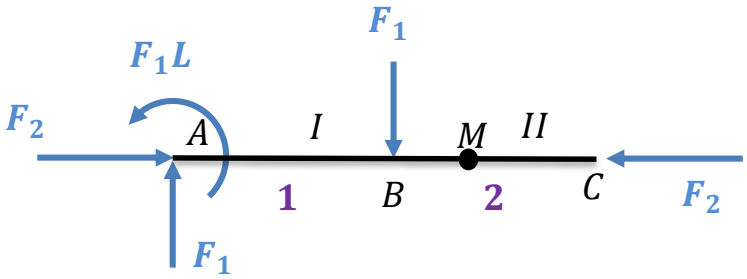
$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{\overline{S}\to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{B} + \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{C} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(l-x) \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{M} \quad \forall x \epsilon]0, l[$$

Soit

$$\begin{cases} N(x) = -F_2 \ \forall x \epsilon]0, l[\\ T_y(x) = -F_1 \ \forall x \epsilon]0, l[\\ T_z(x) = 0 \ \forall x \epsilon]0, l[\\ M_t(x) = 0 \ \forall x \epsilon]0, l[\\ M_{f_y}(x) = 0 \ \forall x \epsilon]0, l[\\ M_{f_z}(x) = -F_1(l-x) \ \forall x \epsilon]0, l[\end{cases}$$

• **<u>Tronçon 2</u>**

On étudie le tronçon 1, on place un point M **sur ce tronçon** d'abscisse x et on coupe de la poutre en 2 parties notées I et II :



On détermine alors le torseur de cohésion dans le tronçon étudié :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{\overline{S}\to II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{C} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}}_{M} \quad \forall x \epsilon]l, L[$$

Soit

$$\begin{cases} N(x) = -F_2 \ \forall x \epsilon]l, L[\\ T_y(x) = 0 \ \forall x \epsilon]l, L[\\ T_z(x) = 0 \ \forall x \epsilon]l, L[\\ M_t(x) = 0 \ \forall x \epsilon]l, L[\\ M_{f_y}(x) = 0 \ \forall x \epsilon]l, L[\\ M_{f_z}(x) = 0 \ \forall x \epsilon]l, L[\end{cases}$$

A.IV.5 Diagrammes des sollicitations

A.IV.5.a Définition

Ces diagrammes sont la représentation graphique des 6 sollicitations identifiées au paragraphe précédent en fonction de l'abscisse curviligne s de la poutre le long de Γ. Généralement, pour les poutres droites, s correspond à x. Toutefois, dans des cas de poutres plus complexes, il faudra bien les représenter en fonction de s.

Chaque diagramme représente l'intégralité de la poutre.

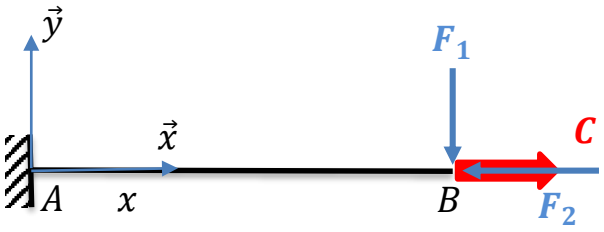
Il convient de respecter la même échelle en abscisse afin d'identifier rapidement les différentes sollicitations dans une section donnée et si possible de les représenter les uns en-dessous des autres.

Enfin, on y fait apparaître les valeurs remarquables.

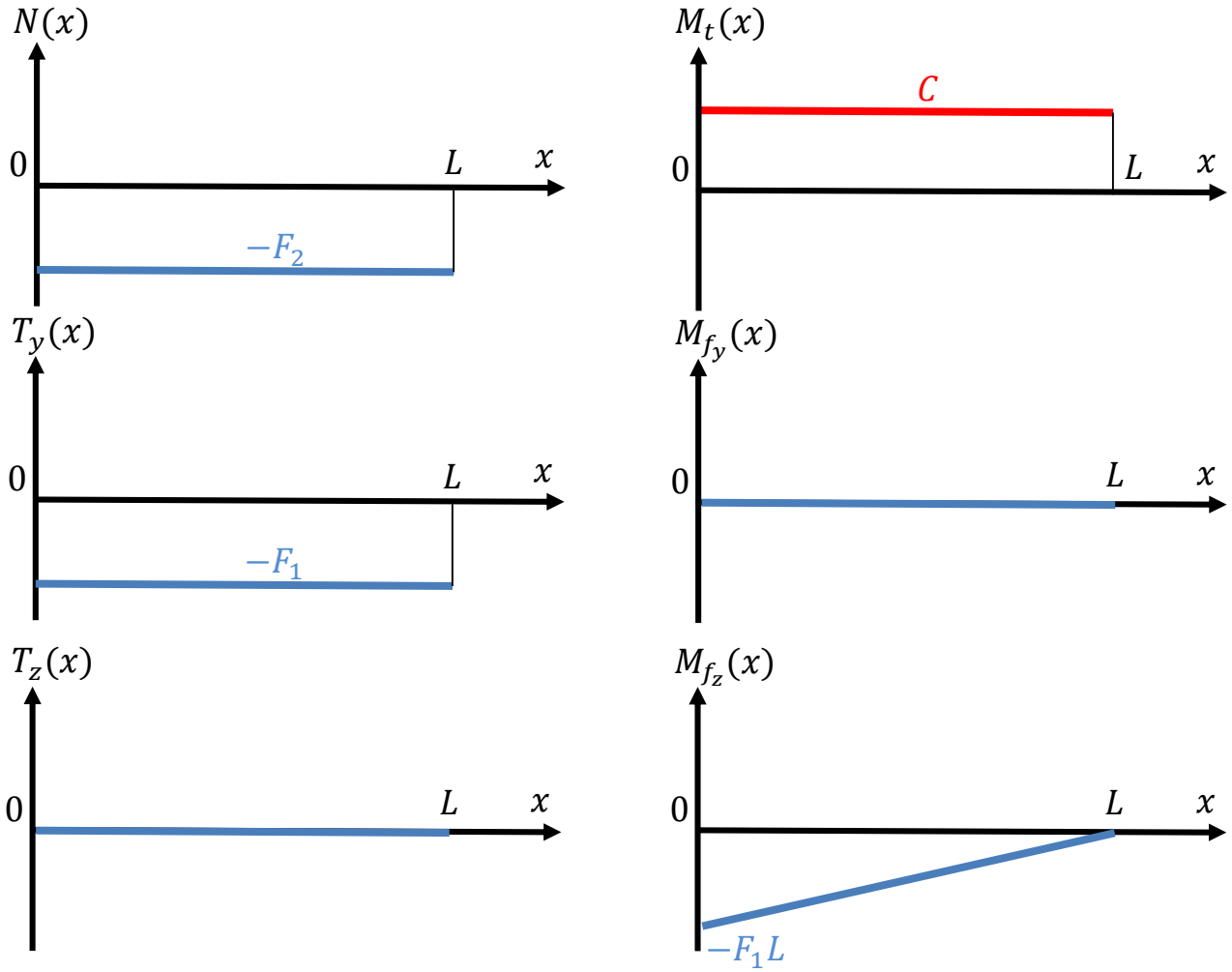
A.IV.5.b Application

A.IV.5.b.i Exemple 1

Traçons les diagrammes des sollicitations du premier exemple que nous venons de traiter.

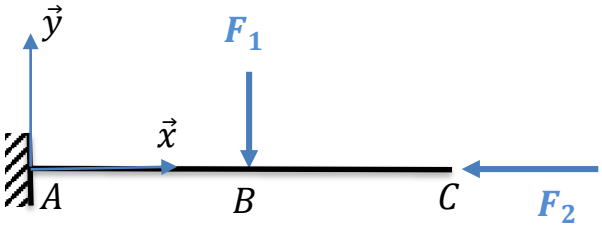


$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(L-x) \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}}$$

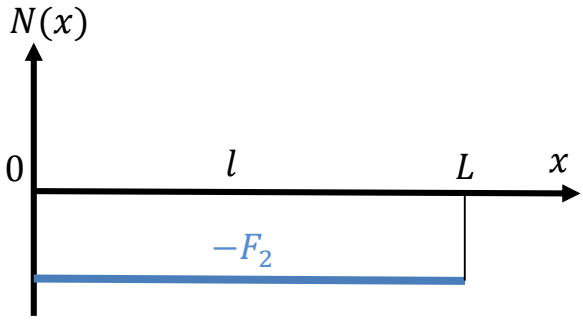


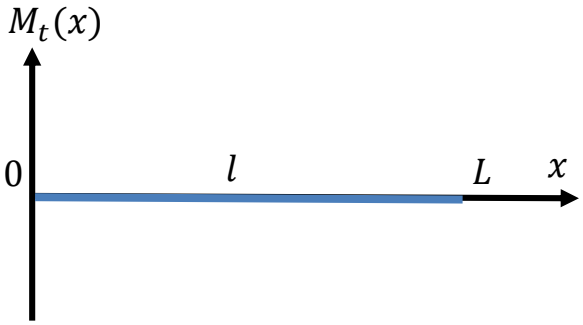
On pourra ne pas représenter les diagrammes pour lesquels la sollicitation reste nulle sur toute la poutre.

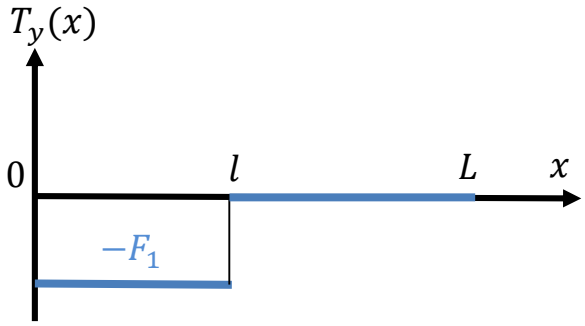
A.IV.5.b.ii Exemple 2

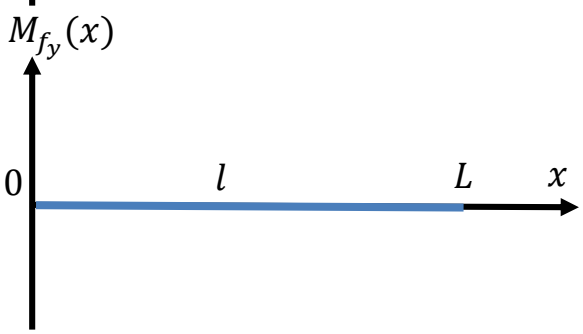


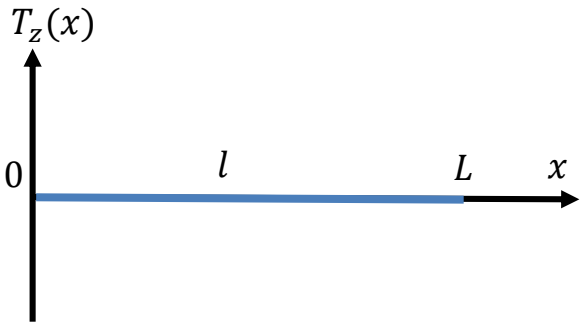
$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{cases} \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(l-x) \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}} & \forall x \epsilon]0, l[\\ \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}} & \forall x \epsilon]l, L[\end{cases}$$

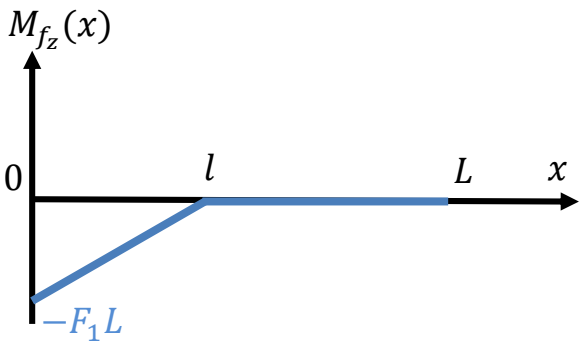










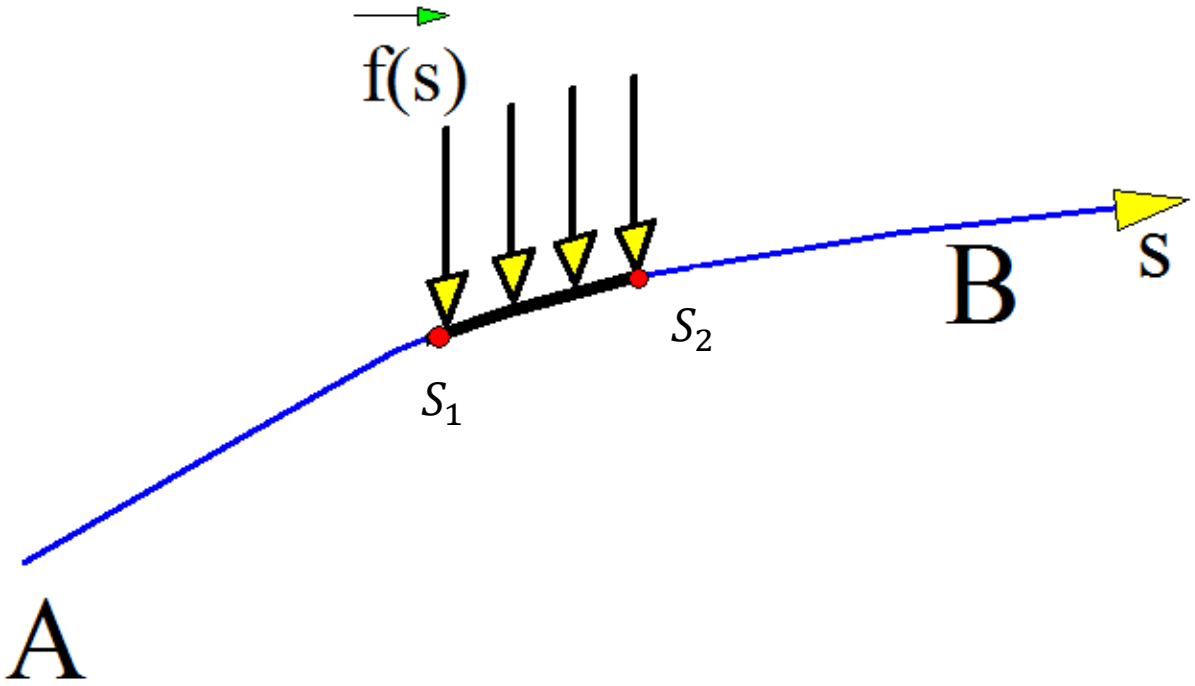


A.IV.6 Continuité des sollicitations

Une discontinuité de résultante ou de moment est un point où sa dérivée tend vers l'infini. Déterminons dans quelles conditions les composantes du torseur de cohésion sont continues ou discontinues.

A.IV.6.a Point de continuité

A.IV.6.a.i Schéma



On suppose une répartition continue d'effort entre S_1 et S_2. Notons $\vec{f}(s)ds$ l'action élémentaire appliquée au point d'abscisse s.

Isolons le tronçon entre S_1 et S_2. Il est soumis à :

- l'action de la partie de poutre avant S_1 : $-\vec{R}(S_1)$
- l'action de la partie de poutre après S_2: $\vec{R}(S_2)$
- l'action de la charge linéique : $\int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds$

A.IV.6.a.ii En termes d'effort

On applique le PFS à ce tronçon en résultante :

$$\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds = \vec{0}$$

$$\int_{S_1}^{S_2} d\vec{R}(s) + \int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds = \vec{0}$$

$$\int_{S_1}^{S_2}\left[\frac{d\vec{R}(s)}{ds}+\vec{f}(s)\right]ds=\vec{0}$$

$$\frac{d\vec{R}(s)}{ds}+f(s)=\vec{0}$$

Conclusion : la dérivée de la résultante n'est pas infinie en un point où il y a une répartition linéique d'effort.

A.IV.6.a.iii En termes de moment

On se place en un point O quelconque et on applique le PFS à ce tronçon en moment :

$$-\left[\vec{M}(S_1)+\overrightarrow{OG(S_1)}\wedge\vec{R}(S_1)\right]+\left[\vec{M}(S_2)+\overrightarrow{OG(S_2)}\wedge\vec{R}(S_2)\right]+\int_{S_1}^{S_2}\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{f}(s)ds=\vec{0}$$

$$\vec{M}(S_2)-\vec{M}(S_1)+\overrightarrow{OG(S_2)}\wedge\vec{R}(S_2)-\overrightarrow{OG(S_1)}\wedge\vec{R}(S_1)+\int_{S_1}^{S_2}\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{f}(s)ds=\vec{0}$$

$$\int_{S_1}^{S_2}d\vec{M}(s)+\int_{S_1}^{S_2}d\left(\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{R}(s)\right)+\int_{S_1}^{S_2}\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{f}(s)ds=\vec{0}$$

$$\int_{S_1}^{S_2}\left(\frac{d\vec{M}(s)}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{R}(s)\right)+\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{f}(s)\right)ds=\vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds}+\frac{d}{ds}\left[\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{R}(s)\right]+\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{f}(s)=\vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds}+\frac{d}{ds}\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{R}(s)+\overrightarrow{OG(s)}\wedge\frac{d}{ds}\vec{R}(s)+\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{f}(s)=\vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds}+\frac{d}{ds}\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{R}(s)+\overrightarrow{OG(s)}\wedge\left[\frac{d}{ds}\vec{R}(s)+\vec{f}(s)\right]=\vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds}+\frac{d}{ds}\overrightarrow{OG(s)}\wedge\vec{R}(s)=\vec{0}$$

Or :

$$\frac{d}{ds}\overrightarrow{OG(s)}=\overrightarrow{x_\Sigma}$$

Donc

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds}+\overrightarrow{x_\Sigma}\wedge\vec{R}(s)=\vec{0}$$

Conclusion : la dérivée du moment n'est pas infinie en un point où il y a une répartition linéique d'effort.

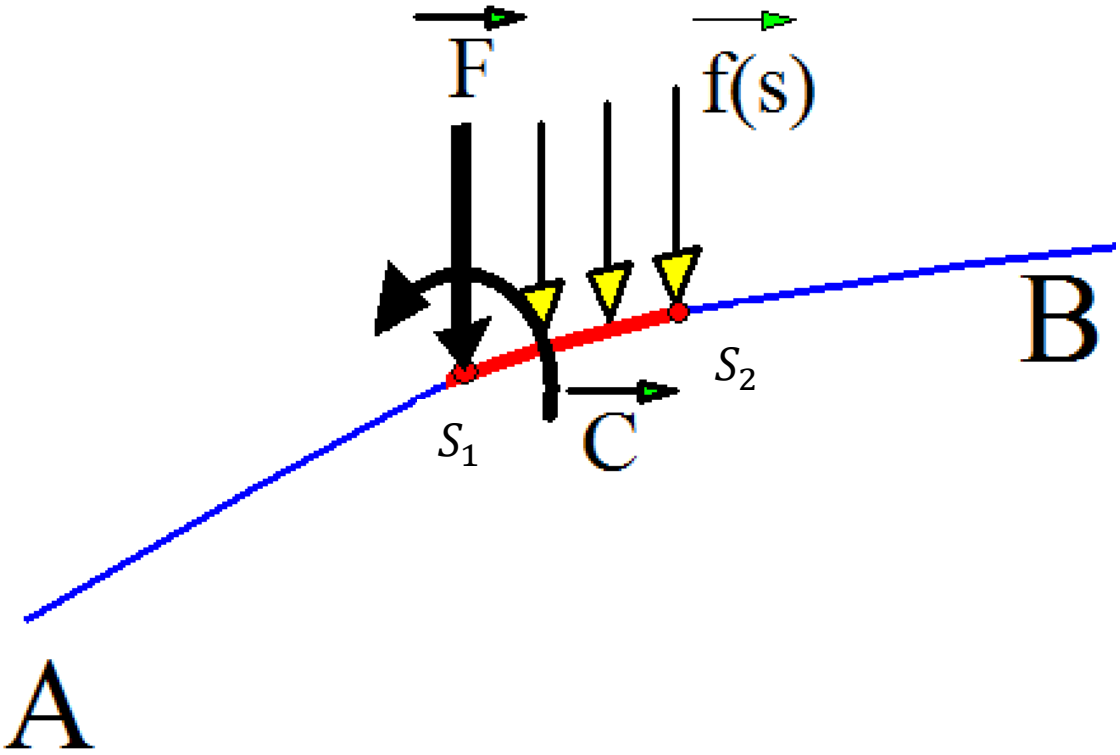
A.IV.6.a.iv Bilan

En un point où une densité linéique d'effort est appliquée, il y a continuité de la résultante et du moment.

A.IV.6.b Point de discontinuité

A.IV.6.b.i Schéma

Un point de discontinuité est un point en lequel il y a un effort concentré appliqué.



En plus des conditions précédentes, on suppose qu'en $G(S_1)$ sont appliqués un effort concentré $\vec{F}$ et un couple $\vec{C}$.

Isolons le tronçon entre S_1 et S_2. Il est soumis à :

- l'action de la partie de poutre avant S_1 : $-\vec{R}(S_1)$
- l'action de la partie de poutre après S_2: $\vec{R}(S_2)$
- l'action de la charge linéique : $\int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds$
- l'action $\vec{F}$
- le couple $\vec{C}$

Rappelons que :

$\lim_{h\to 0}[\vec{f}(x+h)-\vec{f}(x)] = \begin{cases} \vec{0} \; si \; \vec{f} \; est \; continue \\ \Delta\vec{f} \; si \; \vec{f} \; est \; discontinue \end{cases}$	$\forall (a,b) \in R \int_a^b \vec{f}(s)ds = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}(s) = \vec{0}$

A.IV.6.b.ii En termes d'effort

On applique le PFS à ce tronçon en résultante :

$$\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds + \vec{F} = \vec{0}$$

On a :

$$\lim_{S_2 \to S_1} \left[\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1)\right] = \Delta\vec{R}$$

$$\lim_{S_2 \to S_1} \left[\int_{s}^{s+h} \vec{f}(t)dt\right] = 0$$

Soit :

$$\lim_{S_2 \to S_1} \left[\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1) + \int_{s}^{s+h} \vec{f}(t)dt + \vec{F}\right] = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{R} = -\vec{F}$$

Conclusion : la résultante est discontinue en un point où il y a un effort concentré.

A.IV.6.b.iii En termes de moment

On se place en un point O quelconque et on applique le PFS à ce tronçon en moment :

$$\vec{M}(S_2) - \vec{M}(S_1) + \overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) - \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s)ds + \vec{C} = \vec{0}$$

On a :

$$\lim_{S_2 \to S_1} \left[\vec{M}(S_2) - \vec{M}(S_1)\right] = \Delta\vec{M}$$

$$\lim_{S_2 \to S_1} \left[\int_{S_1}^{S_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s)ds\right] = 0$$

$$\lim_{S_2 \to S_1} \left[\overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) - \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1)\right] = 0$$

Soit :

$$\lim_{S_2 \to S_1} \left[\vec{M}(S_2) - \vec{M}(S_1) + \overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) - \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s)ds + \vec{C}\right] = 0$$

$$\Delta\vec{M} = -\vec{C}$$

Conclusion : le moment est discontinu en un point où il y a un couple.

A.IV.6.b.iv Bilan

En un point où un effort concentré est appliqué, il y a discontinuité de la résultante.

En un point où un couple est appliqué, il y a discontinuité du moment.

A.IV.7 Découpage d'une poutre en tronçons

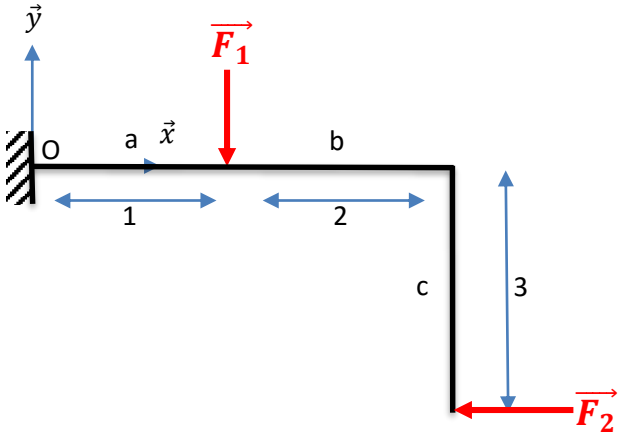
L'analyse que nous venons de mener nous montre que le torseur de cohésion ne sera pas continu lors de l'application d'efforts ou de moments concentrés. Les lieux d'application d'efforts et moments concentrés seront donc des lieux de découpage des poutres en différents tronçons.

Plus généralement, les découpages de poutres en tronçons auront lieu :

- aux points d'application d'efforts concentrés et de couples
- aux points où les conditions aux limites changent : application d'un effort linéique etc.
- aux lieux ou la géométrie de la ligne moyenne de la poutre change, il y aura ici aussi discontinuité d'éléments de réduction du torseur de cohésion.
- aux lieux où la géométrie de la section change
- aux lieux où le matériau change

Remarque : En cas de variations de géométrie, penser à exprimer les torseurs de cohésion en fonction de l'abscisse curviligne s.

Exemple :



Expression en fonction de x et y :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_C{}^1\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(a-x) - F_2 c \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{M} \quad \forall x \in]0; a[$$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_C{}^2\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -F_2 c \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{M} \quad \forall x \in]a; a+b[$$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_C{}^3\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_2 & 0 \\ 0 & -F_2(c+y) \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{M} \quad si\ x = a+b\ et\ y \in]0; -c[$$

Expression en fonction de s :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_C{}^1\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(a-s) - F_2 c \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{M} \quad \forall s \in]0; a[$$

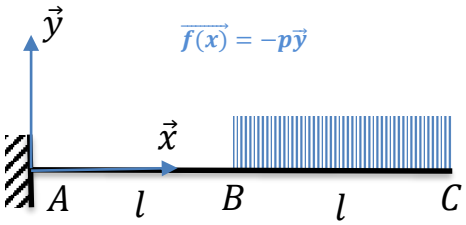
$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_C{}^2\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -F_2 c \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{M} \quad \forall s \in]a; a+b[$$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_C{}^3\} = \{\mathcal{T}_{ext\to II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_2 & 0 \\ 0 & -F_2(a+b+c-s) \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_2}_{M} \quad \forall s \in]a+b; a+b+c[$$

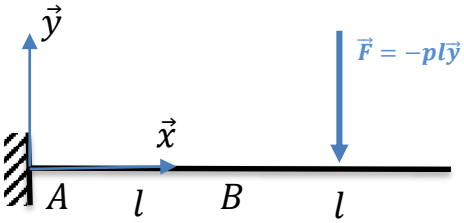
$$\begin{cases} N(x) = \begin{cases} -F_2 \ \forall s \in]0;a[\\ -F_2 \ \forall s \in]a;a+b[\\ 0 \ \forall s \in]a+b;a+b+c[\end{cases} \\ T_y(x) = \begin{cases} -F_1 \ \forall s \in]0;a[\\ 0 \ \forall s \in]a;a+b[\\ -F_2 \ \forall s \in]a+b;a+b+c[\end{cases} \\ M_{fz}(x) = \begin{cases} -F_1(a-s) - F_2 c \ \forall s \in]0;a[\\ -F_2 c \ \forall s \in]a;a+b[\\ -F_2(a+b+c-s) \ \forall s \in]a+b;a+b+c[\end{cases} \end{cases}$$

A.IV.8 Actions linéiques et torseurs de cohésion

Prenons le cas d'une poutre soumise à une action linéique sur un tronçon :



Lors du calcul du torseur de cohésion dans le tronçon AB, il est conseillé de remplacer la densité linéique d'effort par l'effort concentré représentant son action globale au point ou le moment de cette action est nul. Dans le cas de l'action répartie uniformément, en son milieu :



Attention : dans le tronçon BC, il serait faux de faire la même démarche.

A.V. Contraintes et déformations

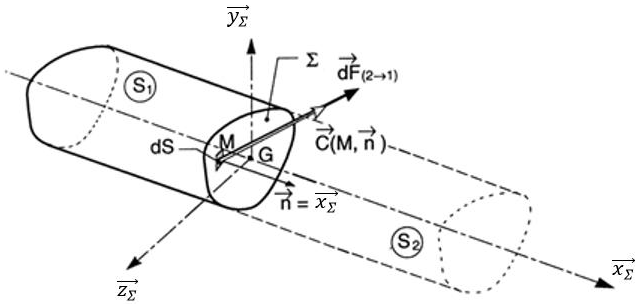
A.V.1 Contraintes internes

Des efforts traversant une section génèrent, localement, des contraintes et des déformations dans la matière dépendant de la géométrie de la section.

A.V.1.a Vecteur contrainte

En un point M d'une poutre, on peut définir une infinité d'éléments de surface de normale unitaire $\vec{n}$.

Soit $d\vec{F}_{2\to1}$ l'action élémentaire de S_2 sur S_1 s'exerçant en M sur la surface élémentaire dS de normale extérieure $\vec{n}$.



La densité surfacique d'effort $\vec{C}(M,\vec{n})$ ou contrainte au point M pour la direction $\vec{n}$ est définie par :

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \lim_{dS\to 0} \frac{d\vec{F}_{2\to1}}{dS}$$

Elle est représentée par un vecteur d'origine M, nommé vecteur contrainte, colinéaire à $d\vec{F}_{2\to1}$ et d'unité le pascal (Pa).

Généralement, on utilisera le MPa pour parler de contraintes.

$$1\ MPa = 10^6\ Pa$$

Dans ce chapitre, nous nous limiterons aux contraintes associées aux surfaces élémentaires définies dans une section droite Σ appartenant à I de normale extérieure $\vec{n} = \overrightarrow{x_\Sigma}$.

Remarque : En isolant successivement I et II et en utilisant le théorème des actions réciproques, on montre que :

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = -\vec{C}(M,-\vec{n})$$

Ordre de grandeur : Soit un doigt posé sur une table et excerçant une force correspondant à 1 kg, soit 10N, en assimilant la surface à un disque de diamètre 1 cm, on a :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{10}{\pi * 0{,}005^2} = 0{,}13\ MPa$$

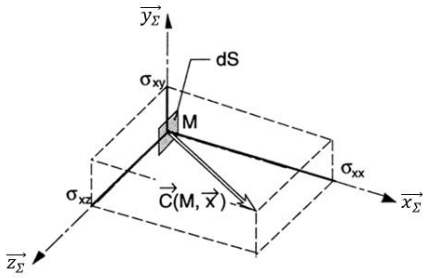
A.V.1.b Types de contraintes

Soit la base B_Σ associée à la section droite Σ telle que $\vec{n} = \overrightarrow{x_\Sigma}$.

Les sections droites des poutres sont soumises à deux types de contraintes :

- Contraintes normales
- Contraintes tangentielles

Ces contraintes sont notées σ_{ij}, i désignant l'orientation de la facette, j désignant l'indice de projection de la contrainte.



La contrainte normale au point M est définie par

$$\sigma_{xx} = \vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}).\overrightarrow{x_\Sigma}$$

La contrainte tangentielle suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$ au point M est définie par

$$\sigma_{xy} = \vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}).\overrightarrow{y_\Sigma}$$

La contrainte tangentielle suivant $\overrightarrow{z_\Sigma}$ au point M est définie par

$$\sigma_{xz} = \vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}).\overrightarrow{z_\Sigma}$$

On a donc :

$$\vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}) = \sigma_{xx}\overrightarrow{x_\Sigma} + \sigma_{xy}\overrightarrow{y_\Sigma} + \sigma_{xz}\overrightarrow{z_\Sigma}$$

A.V.1.c Lien avec le torseur de cohésion

Le torseur de cohésion modélise globalement l'action de la densité surfacique d'effort transitant dans une section.

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{II\to I}\} = \left\{ \begin{array}{c} \int_\Sigma \vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma})\, dS \\ \int_\Sigma \overrightarrow{GM} \wedge \vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma})\, dS \end{array} \right\}_G$$

En posant $\overrightarrow{GM} = y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma}$, on a : $\overrightarrow{GM} \wedge \vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}) = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}^{B_\Sigma} \wedge \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}^{B_\Sigma} = \begin{bmatrix} y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy} \\ z\sigma_{xx} \\ -y\sigma_{xx} \end{bmatrix}^{B_\Sigma}$

On obtient les six équations de projection suivantes :

$N = \int_\Sigma \sigma_{xx}\, dS$	$M_t = \int_\Sigma (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy})\, dS$
$T_y = \int_\Sigma \sigma_{xy}\, dS$	$M_{f_y} = \int_\Sigma z\sigma_{xx}\, dS$
$T_z = \int_\Sigma \sigma_{xz}\, dS$	$M_{f_z} = -\int_\Sigma y\sigma_{xx}\, dS$

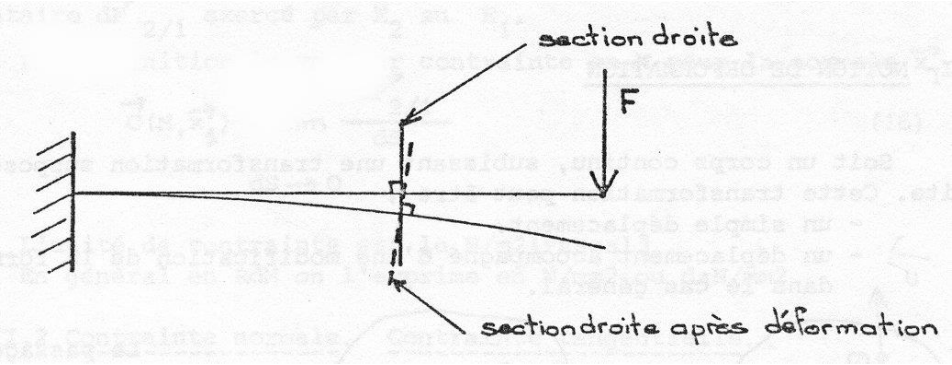
A.V.2 Déformations

Dans la suite, nous noterons x l'abscisse curviligne le long de la poutre.

A.V.2.a Hypothèses

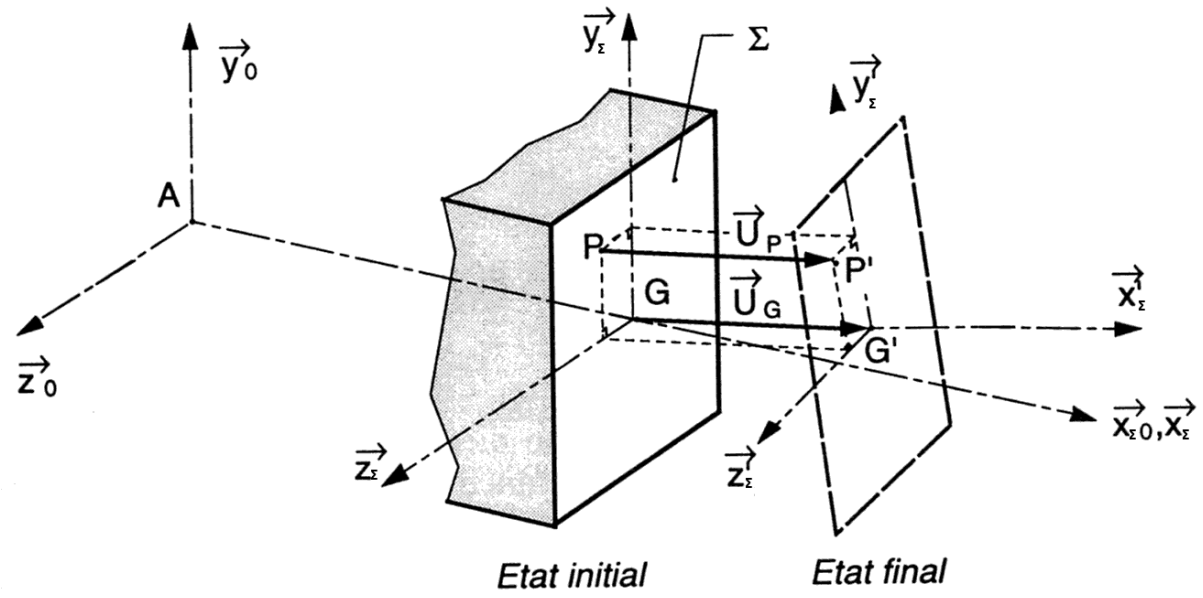
Les déformations sont considérées comme suffisamment petites pour que l'on puisse les négliger lorsque l'on applique le principe fondamental de la statique. Autrement dit, on suppose que la direction et la position des actions mécaniques extérieures ne dépend pas de la déformation de la poutre.

Rappelons que l'on se place dans le cas de l'hypothèse de Navier Bernoulli. Cette hypothèse simplificatrice n'est parfaitement vérifiée que lorsqu'il n'y a pas de contrainte de cisaillement.



A.V.2.b Torseur des petits déplacements des points d'une section

Soit la figure suivante :



Suite à un chargement, les déformations transportent le repère $(G, \vec{x}_\Sigma, \vec{y}_\Sigma, \vec{z}_\Sigma)$ en $(G', \vec{x}_\Sigma{}', \vec{y}_\Sigma{}', \vec{z}_\Sigma{}')$.

Le déplacement de G s'exprime comme suit :

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{U_G} = \vec{U}(x) = u\overrightarrow{x_\Sigma} + v\overrightarrow{y_\Sigma} + w\overrightarrow{z_\Sigma}$$

Le déplacement angulaire de la base $(\vec{x}_\Sigma, \vec{y}_\Sigma, \vec{z}_\Sigma)$ s'exprime comme suit :

$$\vec{\theta}(x) = \theta_x\overrightarrow{x_\Sigma} + \theta_y\overrightarrow{y_\Sigma} + \theta_z\overrightarrow{z_\Sigma}$$

Dans les hypothèses de ce chapitre, on peut considérer que le déplacement d'une section s'effectue comme un solide rigide. On a donc, pour tout point P de la section :

$$\overrightarrow{U_P} = \overrightarrow{U_G} + \overrightarrow{PG} \wedge \vec{\theta}(x)$$

Vrai dans le cadre des petits déplacements

On exprime le torseur des petits déplacements de la section à l'abscisse x $\{\delta(x)\}$ comme suit :

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} \theta_x\overrightarrow{x_\Sigma} + \theta_y\overrightarrow{y_\Sigma} + \theta_z\overrightarrow{z_\Sigma} \\ u\overrightarrow{x_\Sigma} + v\overrightarrow{y_\Sigma} + w\overrightarrow{z_\Sigma} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\theta}(x) \\ \vec{U}(x) \end{Bmatrix}_G$$

A.V.2.c Torseur des petites déformations

A.V.2.c.i Définitions

La déformation linéaire moyenne, pour une direction donnée, représente le rapport du vecteur associé à la variation de la distance entre deux points voisins et de la distance initiale entre ces deux points.

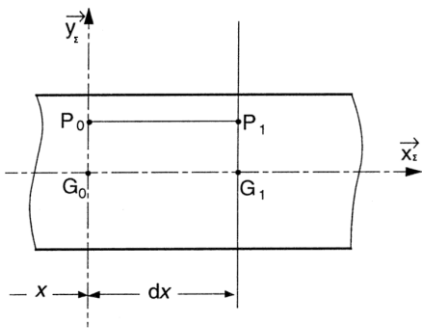
La déformation linéaire locale, pour une direction donnée, représente la limite du rapport du vecteur associé à la variation de la distance entre deux points voisins et de la distance initiale entre ces deux points, lorsque celle-ci tend vers 0.

Une déformation est un nombre sans unité. Elle traduit une variation entre deux états.

A.V.2.c.ii Détermination

- **Objectif**

Intéressons-nous à un élément de poutre de longueur dx dans la situation initiale non déformée suivante :



Etat initial

On nomme section 0 et section 1 respectivement les sections de la poutre aux abscisses x et $x + dx$.

Notre objectif est d'étudier le déplacement des points P_0 et P_1 en des points P_0'' et P_1'' afin de quantifier la variation du vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ en un vecteur $\overrightarrow{P_0''P_1''}$. Pour cela, nous allons décomposer le déplacement du point P_1 en deux déplacements :

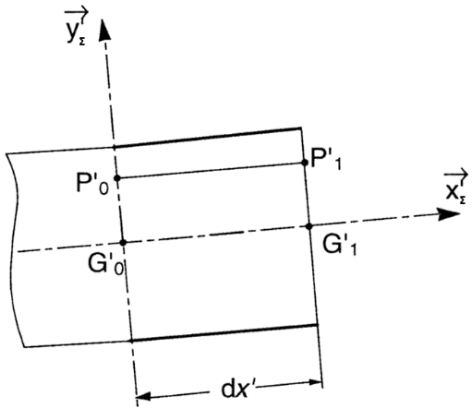
- Déplacement du point P_1 en un point P_1' du fait de la déformation de la poutre avant l'abscisse x
- Déplacement du point P_1' en un point P_1'' du fait de la déformation de du tronçon de poutre de longueur dx entre l'abscisse x et l'abscisse $x + dx$

On pourra alors calculer la déformation locale $\overrightarrow{\varepsilon_{P_0}}$ d'après la définition donnée précédemment :

$$\overrightarrow{\varepsilon_{P_0}} = \lim_{dx \to 0} \frac{déformation\ élément}{longueur\ initiale} = \lim_{dx \to 0} \frac{\overrightarrow{P_1'P_1''}}{dx}$$

- **<u>Déformation de la poutre avant x</u>**

Dans un premier temps, considérons la déformation de la partie I de la poutre, d'abscisse inférieure à x. Cette déformation n'a pas d'influence sur l'état de déformation de l'élément de longueur dx étudié mais change sa position et son orientation. L'ensemble de l'élément de longueur dx se déplace comme un solide rigide.



Avec $dx' = dx$.

On appelle $\vec{U}(x)$ le déplacement d'un point de la ligne moyenne de la poutre à l'abscisse x et $\vec{\theta}(x)$ la rotation de la section à l'abscisse x

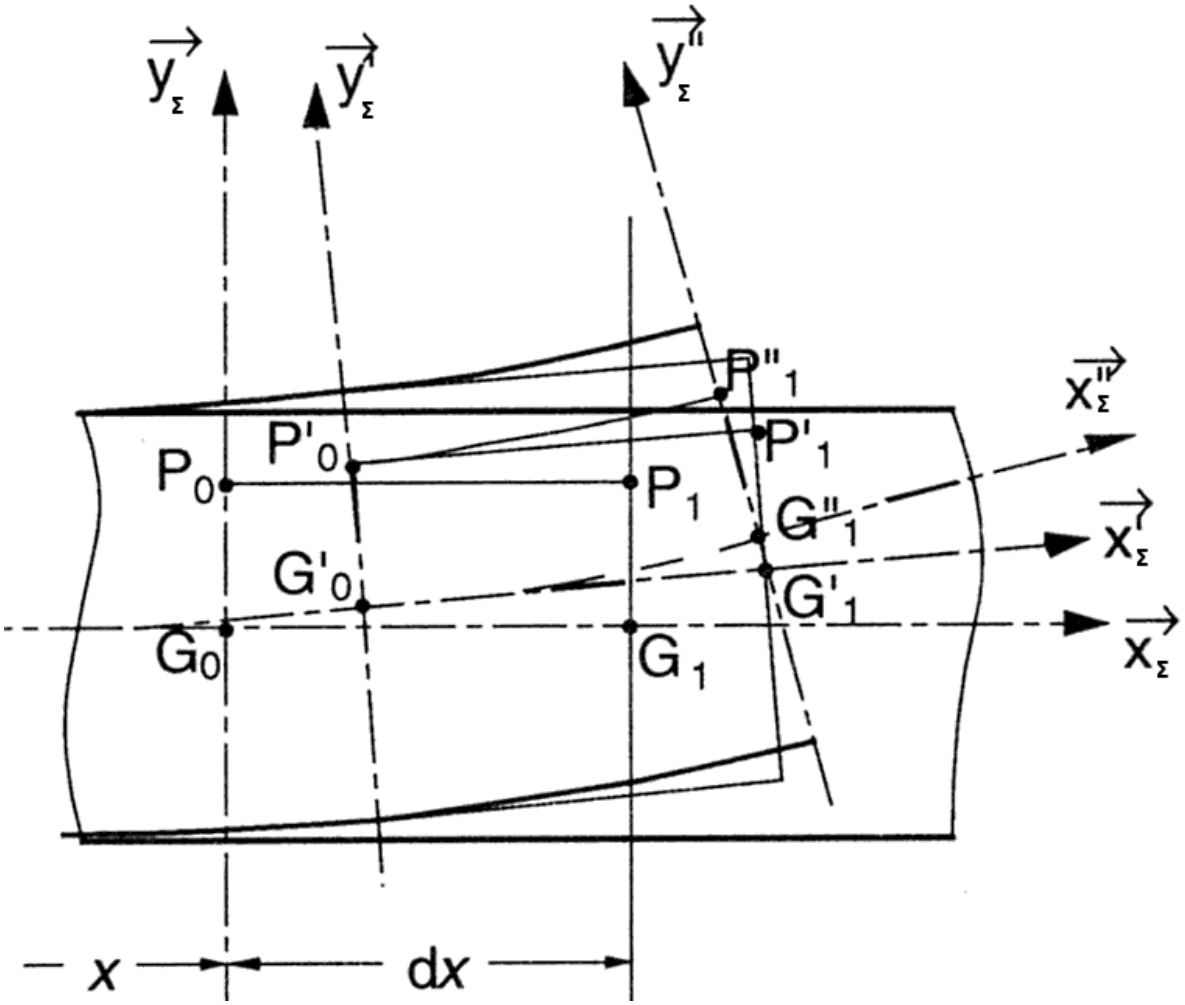
Le déplacement du centre G_0 de la section avant l'élément de longueur dx vaut : $\overrightarrow{U_{G_0}} = \vec{U}(x)$

L'élément de longueur dx de déplaçant dans un mouvement de solide rigide (on ne considère pas encore sa déformation), le déplacement de P_1 vers $P_1{}'$dans la section en 1 s'exprime alors :

$$\overrightarrow{U_{P_1}{}'} = \overrightarrow{U_{G_0}} + \overrightarrow{P_1G_0}\Lambda\vec{\theta}(x) = \vec{U}(x) + \overrightarrow{P_1G_1}\Lambda\vec{\theta}(x) + \overrightarrow{G_1G_0}\Lambda\vec{\theta}(x)$$

- **<u>Déformation de l'élément de longueur dx</u>**

Dans un second temps, considérons la déformation de l'élément de longueur dx.



Comme la section à l'abscisse x ne se déforme pas, les points ${P_0}''$ et ${G_0}''$ sont confondus avec les points ${P_0}'$ et ${G_0}'$.

On appelle $\vec{U}(x+dx)$ le déplacement du centre G_1 de la poutre dans la section à l'abscisse $x+dx$ et $\vec{\theta}(x+dx)$ la rotation de cette section.

Le déplacement du centre G_1 suite à la déformation de l'élément de longueur dx s'écrit : $\overrightarrow{U_{G_1}} = \vec{U}(x+dx)$

La section à l'abscisse $x+dx$ se déplaçant dans un mouvement de solide rigide (hypothèse de Navier Bernoulli), le déplacement de P_1 vers ${P_1}''$dans la section en 1 s'exprime comme suit :

$$\overrightarrow{U_{{P_1}''}} = \overrightarrow{U_{G_1}} + \overrightarrow{P_1G_1}\Lambda\vec{\theta}(x+dx) = \vec{U}(x+dx) + \overrightarrow{P_1G_1}\Lambda\vec{\theta}(x+dx)$$

- **Expression de la déformation $\overrightarrow{P_1{}'P_1{}''}$**

On peut donc exprimer le vecteur $\overrightarrow{P_1{}'P_1{}''}$ correspondant à la variation de longueur du vecteur initial $\overrightarrow{P_0P_1}$ de longueur dx.

$$\overrightarrow{P_1{}'P_1{}''} = \overrightarrow{U_{P_1{}''}} - \overrightarrow{U_{P_1{}'}}$$

$$\overrightarrow{P_1{}'P_1{}''} = \vec{U}(x+dx) - \vec{U}(x) + \overrightarrow{P_1G_1} \wedge \left[\vec{\theta}(x+dx) - \vec{\theta}(x)\right] + \overrightarrow{G_0G_1} \wedge \vec{\theta}(x)$$

Avec $\overrightarrow{G_0G_1} = dx\overrightarrow{x_\Sigma}$

- **Déformation locale**

Finalement, on peut exprimer la déformation linéaire moyenne $\frac{\overrightarrow{P_1{}'P_1{}''}}{dx}$ et la déformation linéaire locale $\overrightarrow{\varepsilon_{P_0}}$ en P_0 :

$$\overrightarrow{\varepsilon_{P_0}} = \lim_{dx\to 0} \frac{\overrightarrow{P_1{}'P_1{}''}}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{\vec{U}(x+dx) - \vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{P_1G_1} \wedge \lim_{dx\to 0} \frac{\vec{\theta}(x+dx) - \vec{\theta}(x)}{dx} + \overrightarrow{G_0G_1} \wedge \vec{\theta}(x)$$

$$\overrightarrow{P_0G_0} = \overrightarrow{P_1G_1}$$

$$\overrightarrow{\varepsilon_{P_0}} = \frac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{P_0G_0} \wedge \frac{d\vec{\theta}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma} \wedge \vec{\theta}(x)$$

En tout point P de la section d'abscisse x, on a donc :

$$\overrightarrow{\varepsilon_P} = \frac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma} \wedge \vec{\theta}(x) + \overrightarrow{PG} \wedge \frac{d\vec{\theta}(x)}{dx}$$

On reconnaît ici une relation ayant une expression de la même forme qu'un changement de point d'un champ de moment. $\overrightarrow{\varepsilon_P}$ est le champ de moment du torseur des petites déformations en tout point d'une section droite avec :

- la résultante : $\vec{\gamma}(x) = \frac{d\vec{\theta}(x)}{dx}$
- le moment en G : $\vec{\varepsilon}(x) = \overrightarrow{\varepsilon_G} = \frac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma} \wedge \vec{\theta}(x)$

On introduit donc le torseur des petites déformations d'une section $\{\varepsilon(x)\}$:

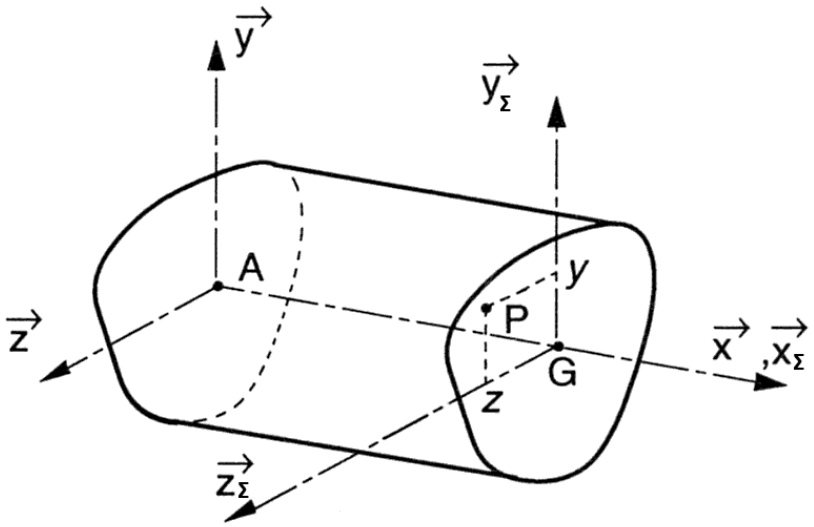
$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(x) \\ \vec{\varepsilon}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \gamma_x\overrightarrow{x_\Sigma} + \gamma_y\overrightarrow{y_\Sigma} + \gamma_z\overrightarrow{z_\Sigma} \\ \varepsilon_x\overrightarrow{x_\Sigma} + \varepsilon_y\overrightarrow{y_\Sigma} + \varepsilon_z\overrightarrow{z_\Sigma} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\vec{\theta}(x)}{dx} \\ \dfrac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma} \wedge \vec{\theta}(x) \end{Bmatrix}_G$$

$\vec{\gamma}(x)$ est la déformation angulaire.

$\vec{\varepsilon}(x)$ est la déformation linéaire.

A.V.2.c.iii Expression

Soit un point P d'une section droite d'une poutre d'abscisse x.



$$\overrightarrow{PG} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \\ -z \end{bmatrix}^{B_\Sigma}$$

Si l'on pose :

$\vec{U}(x) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^{B_\Sigma}$	$\vec{\theta}(x) = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}^{B_\Sigma}$

Alors :

$\vec{\gamma}(x) = \begin{bmatrix} \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{bmatrix}^{B_\Sigma}$	$\overrightarrow{\varepsilon_P} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \varepsilon_y(x) \\ \varepsilon_z(x) \end{bmatrix}^{B_\Sigma} = \frac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma} \Lambda \vec{\theta}(x) + \overrightarrow{PG} \Lambda \frac{d\vec{\theta}(x)}{dx}$ $\begin{bmatrix} \frac{du}{dx} + z\frac{d\theta_y}{dx} - y\frac{d\theta_z}{dx} \\ \frac{dv}{dx} - z\frac{d\theta_x}{dx} - \theta_z \\ \frac{dw}{dx} + y\frac{d\theta_x}{dx} + \theta_y \end{bmatrix}_P^{B_\Sigma}$

A.V.3 Linéarité des contraintes et déformations au chargement

La théorie de la RDM est une théorie linéaire, la conséquence en est la règle de superposition de l'effet des chargements. Soient deux systèmes d'efforts extérieurs $\{F_1\}$ et $\{F_2\}$ produisant respectivement un état de contrainte $\{\sigma_1\}$ et $\{\sigma_2\}$ et un état de déformation $\{D_1\}$ et $\{D_2\}$.

Alors, si on applique conjointement les systèmes d'efforts $\{\lambda F_1\}$ et $\{\mu F_2\}$, on aura un état de contrainte qui sera égal à $\{\lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2\}$ et un état de déformation égal à $\{\lambda D_1 + \mu D_2\}$.

A.V.4 Liens entre contraintes et déformations

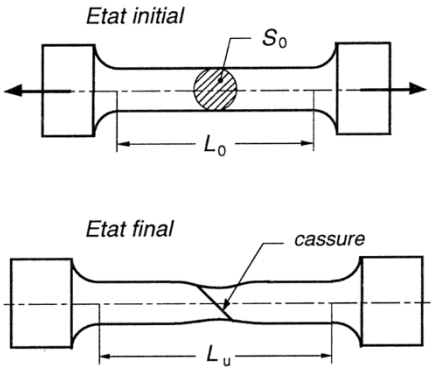
A.V.4.a Contraintes normales

A.V.4.a.i Essai de traction

Soit une éprouvette de section initiale S_0 et de longueur initiale L_0.

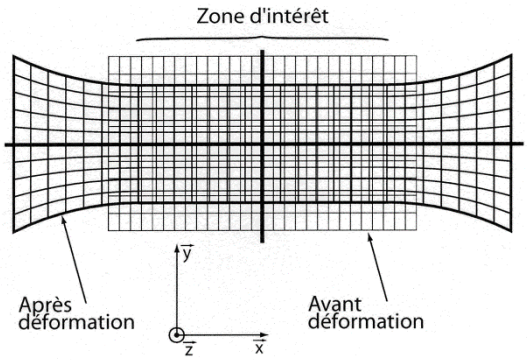
Pour caractériser le comportement des matériaux sous l'effet d'une contrainte normale, l'essai le plus classique est l'essai de traction. On place l'éprouvette de dimensions normalisées entre deux mors, l'un fixe et l'autre mobile, puis :

- soit on pilote un déplacement
- soit on pilote un effort



Lors de l'essai, on mesure l'effort appliqué à l'éprouvette égal à F ainsi que le déplacement du mors mobile.

Si l'on dessine sur l'éprouvette une grille parfaite avant déformation, on remarque après déformation la structure suivante :

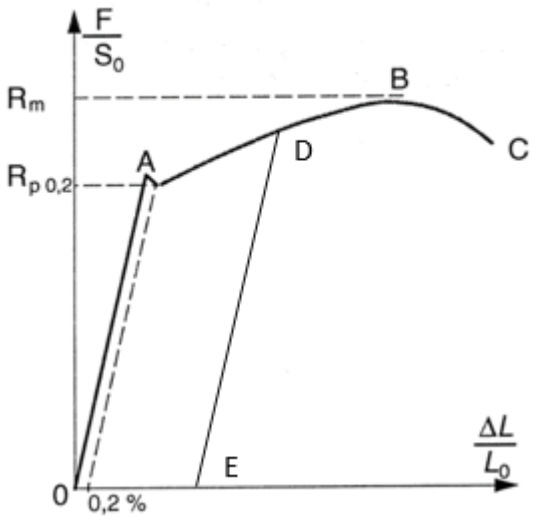


Il ressort une zone d'intérêt où l'état des contraintes est homogène, constant et non soumis à des contraintes tangentielles.

A.V.4.a.ii Analyse d'un essai piloté en déplacement

• **Courbe Contrainte/Déformation**

A partir des mesures de la force appliquée dans l'éprouvette et du déplacement, on détermine la contrainte $\sigma_{xx} = \frac{F}{S_0}$ et la déformation $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$ dans celle-ci, puis on trace la courbe $\sigma_{xx} = f(\varepsilon)$:



• **Domaine élastique**

Dans un premier temps, on observe une évolution linéaire de la contrainte en fonction de la déformation (segment OA). Cette zone est appelée le domaine élastique.

Au point A, on est à la limite du domaine élastique, et la contrainte associée est appelée la « Limite élastique » notée σ_E ou résistance élastique notée R_E.

Dans le domaine élastique, la déformation est réversible.

Pour certains matériaux, la zone de transition en fin de domaine élastique peut être difficile à définir. On définit alors la limite élastique à 0.2%, notée R_p ou $R_p{}^{0,2}$ définie par l'intersection entre la courbe de l'essai et la droite parallèle à la droite OA du domaine élastique passant par le point (0,2 ;0).

• **Domaine plastique**

Dans un second temps, on observe une courbe croissante entre A et B correspondant au domaine plastique jusqu'au point B. On dit que le matériau s'écrouit, ou qu'il y a écrouissage.

Dans cette zone, si on relâche l'éprouvette, en D par exemple, la courbe suit une droite parallèle à la droite OA jusqu'à une contrainte nulle en E, et il reste alors une déformation résiduelle. Au chargement suivant, la courbe suivra le même chemin de E à D avec un comportement élastique linéaire jusqu'à la valeur de la contrainte atteinte lors du chargement précédent en D, puis l'écrouissage recommencera.

En B, la contrainte est égale à la contrainte de rupture du matériau. Elle est appelée « Contrainte à la rupture » et est notée σ_R ou « Résistance mécanique » notée R_m.

Dans le domaine plastique, la déformation est irréversible et l'éprouvette ne revient pas à sa longueur initiale après déchargement.

On distingue les matériaux selon leur ductilité. La ductilité est la capacité d'un matériau à se déformer plastiquement sans se rompre. Ainsi, un matériau très ductile va beaucoup se déformer avant la rupture alors qu'un matériau fragile (verre par exemple) va très peu se déformer avant de rompre.

- **Striction**

A partir de B, on observe le phénomène de striction. La déformation se concentre au voisinage d'une section dont l'aire diminue rapidement. La striction n'est visible que lors d'un pilotage de l'essai en déformation. En effet, lors d'un pilotage en effort, dès le passage de la contrainte à la rupture, l'éprouvette cède.

- **Rupture**

Au point C, il y a rupture de l'éprouvette.

A.V.4.a.iii Loi de Hooke

Dans le domaine élastique, il existe donc une relation linéaire entre la contrainte normale et la déformation. Le coefficient de proportionnalité entre contrainte σ_{xx} et déformation ε est noté E et s'appelle le module d'Young. On définit alors la loi de Hooke :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_x$$

A.V.4.a.iv Modules d'Young et limite élastique de matériaux classiques

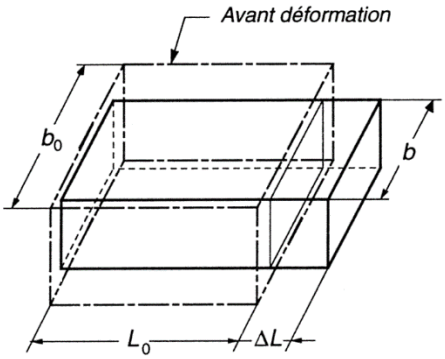
Matériau	Module d'Young E (MPa)	Limite élastique Re (MPa)
Acier	210 000	220
Aluminium	70 000	40
Verre	60 000	3600
Polystyrène	3 000	34

On retrouve parfois la limite élastique des matériaux dans leur désignation normalisée : ex Acier S235

A savoir : la plupart des matériaux métalliques admettent le même comportement en traction et en compression. Il n'en va pas de même pour les bétons qui ne supportent pas la traction.

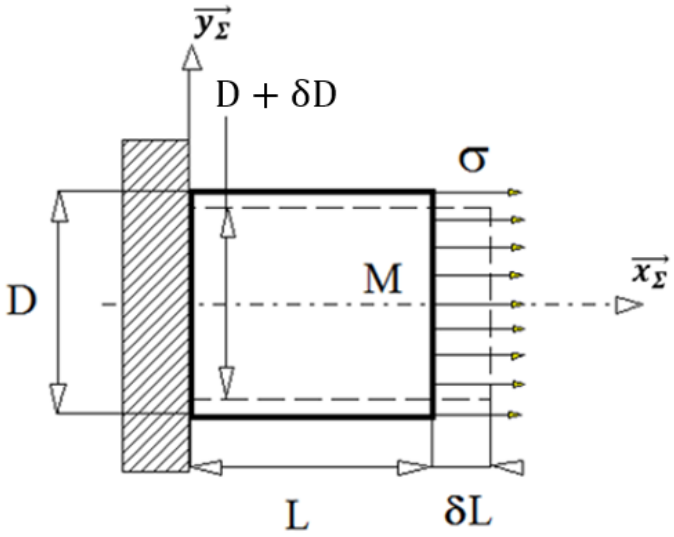
A.V.4.a.v Déformation transversale

La déformation longitudinale de l'éprouvette est accompagnée d'une déformation transversale. Si l'on exerce une traction sur le matériau, on observe un allongement longitudinale accompagné d'une diminution de ses dimensions transversales, et inversement en compression.



Cette déformation n'affecte pas la poutre en elle-même mais la section de celle-ci. La géométrie de la ligne moyenne de la poutre n'est en particulier pas impactée.

Soit la poutre de section circulaire suivante, de diamètre D :



On nomme ε_t la déformation transversale du matériau.

$$\varepsilon_t = \frac{\delta D}{D}$$

On constate expérimentalement que le rapport $-\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$ est constant pour un matériau donné. Ce rapport est noté ν, est sans dimension et s'appelle le coefficient de Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} \qquad \nu \in]0; 0{,}5[$$

Matériau	Coefficient de Poisson
Acier	0,29
Aluminium	0,34
Verre	0,24
Polystyrène	0,4

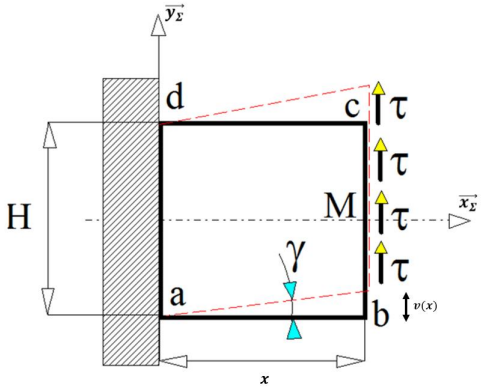
Remarque : la déformation transversale issue de la déformation longitudinale n'induit pas de contraintes tangentielles.

A.V.4.b Contraintes tangentielles

Comme pour les contraintes normales et déformations longitudinales, il existe une relation entre contrainte tangentielle et déformation.

A.V.4.b.i Observations

Soit la pièce suivante soumise à une contrainte tangentielle τ :



On observe une déformation $v(x)$ issue du glissement des différentes sections entre elles. On définit l'angle γ appelé angle de glissement tel que :

$$\tan\gamma = \frac{v(x)}{x} = \varepsilon_y$$

En petites déformations, on a donc :

$$\gamma = \frac{v(x)}{x} = \varepsilon_y$$

Il existe une contrainte tangentielle maximale pour rester dans le domaine élastique du matériau, la résistance élastique au cisaillement notée R_g, aussi nommée limite de glissement.

A.V.4.b.ii Loi de Hooke en cisaillement

On montre que l'angle de glissement γ est proportionnel à la contrainte tangentielle et la relation est définie par la loi de Hooke en cisaillement :

$$\tau = G\varepsilon_y = G\gamma$$

G est appelé module de cisaillement, module de glissement ou module de Coulomb. Il s'exprime en Pa, et souvent en MPa. Il est relié à E et ν par la relation:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

A.V.4.b.iii Modules de Coulomb de matériaux classiques

Matériau	Module de cisaillement G (MPa)
Acier	80 000
Aluminium	26 000
Verre	24 000
Polystyrène	1 050

A.V.4.c Conclusion

Lorsqu'un matériau présente la déformation suivante :

$$\vec{\varepsilon}(x) = \varepsilon_x \overrightarrow{x_\Sigma} + \varepsilon_y \overrightarrow{y_\Sigma} + \varepsilon_z \overrightarrow{z_\Sigma}$$

La contrainte locale dans la matière vaut :

$$\vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}) = E\varepsilon_x \overrightarrow{x_\Sigma} + G\varepsilon_y \overrightarrow{y_\Sigma} + G\varepsilon_z \overrightarrow{z_\Sigma} = \sigma_{xx} \overrightarrow{x_\Sigma} + \sigma_{xy} \overrightarrow{y_\Sigma} + \sigma_{xz} \overrightarrow{z_\Sigma}$$

On définit la contrainte tangentielle globale $\vec{\tau}$ telle que :

$$\vec{\tau} = \sigma_{xy} \overrightarrow{y_\Sigma} + \sigma_{xz} \overrightarrow{z_\Sigma}$$

$$\tau = \|\vec{\tau}\| = \sqrt{{\sigma_{xy}}^2 + {\sigma_{xz}}^2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E\varepsilon_x \\ \sigma_{xy} = G\varepsilon_y \\ \sigma_{xz} = G\varepsilon_z \end{cases}$$

Remarque : la déformation transversale induite par la déformation longitudinale en traction n'induit pas de contraintes tangentielles et ne doit donc pas être considérée dans ces relations.

A.V.5 Contraintes limites dans un matériau

Lors du dimensionnement d'une poutre, on souhaite maintenir les contraintes dans la matière dans le domaine élastique du matériau, que ce soit en termes de contraintes normales ou tangentielles.

A.V.5.a Contrainte normale

Un matériau soumis à des contraintes normales doit rester dans le domaine élastique. Il faut donc :

$$\sigma_{max} < R_E$$

Toutefois, il faut s'assurer d'une sécurité par rapport à cette limite. On introduit donc un coefficient de sécurité $\alpha > 1$. On définit alors la résistance pratique élastique Rp_E

$$Rp_E = \frac{R_E}{\alpha}$$

On impose donc à la contrainte de respecter la condition suivante :

$$\sigma_{max} < Rp_E$$

Remarque : En général, $\alpha > 2$. Ce coefficient est directement lié à la dangerosité d'une rupture accidentelle et des conséquences qu'elle implique. Les coefficients de sécurité dans le civil sont généralement plus importants que ceux dans le domaine militaire. En général, plus les coefficients de sécurité sont élevés, plus les coûts sont importants à conception identique.

A.V.5.b Contrainte tangentielle

Un matériau soumis à des contraintes tangentielles doit rester dans le domaine élastique. Il faut donc :

$$\tau_{max} < R_G$$

où R_G est la « Résistance au glissement »

Ici aussi, on définit la résistance pratique élastique au cisaillement Rp_G, aussi appelée limite pratique au glissement, en fonction du coefficient de sécurité α :

$$Rp_g = \frac{R_G}{\alpha}$$

Selon les matériaux, il existe une relation entre R_G et R_E :

$$R_G = \xi R_E$$

ξ étant un facteur inférieur à 1.

Matériau	**% Carbone**	ξ
Aciers doux	< 0,2	**0,5**
Alliages d'alluminium		
Aciers mi-doux	0,2 à 0,32	0,6
Aciers mi-durs	0,32 à 0,45	0,7
Aciers durs et fontes	> 0,45	0,8

On a donc la relation suivante :

$$Rp_G = \frac{\xi R_E}{\alpha}$$

On impose alors à la contrainte maximale dans la poutre de respecter la condition suivante :

$$\tau_{max} < Rp_G$$

A.VI. Les sollicitations

Pour chacune des sollicitations étudiées dans ce paragraphe (traction-compression, cisaillement, torsion et flexion), la démarche d'analyse sera la même.

Ainsi, nous proposerons :

- La définition de la sollicitation étudiée
- Le torseur des petits déplacements
- Le torseur des déformations
- Les contraintes
- La relation entre contraintes et déformations
- Les critères de dimensionnement des poutres

A.VI.1 La traction-compression

A.VI.1.a Définition

Une poutre ou un tronçon de poutre est soumis à une sollicitation de traction-compression si et seulement si le torseur des efforts intérieurs en G se présente sous la forme :

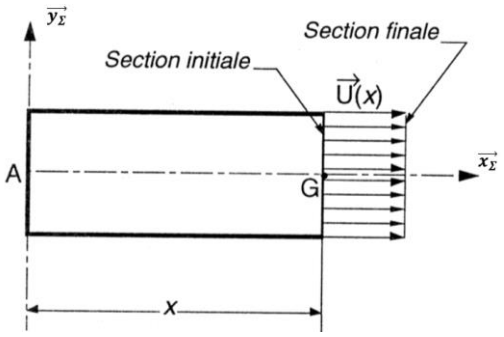
$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} N(x) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$$

Si $N(x) > 0$, la poutre est soumise à de la traction.

Si $N(x) < 0$, la poutre est soumise à de la compression.

A.VI.1.b Déplacements

Dans le cas de la traction compression, le déplacement est longitudinal suivant $\overrightarrow{x_\Sigma}$:



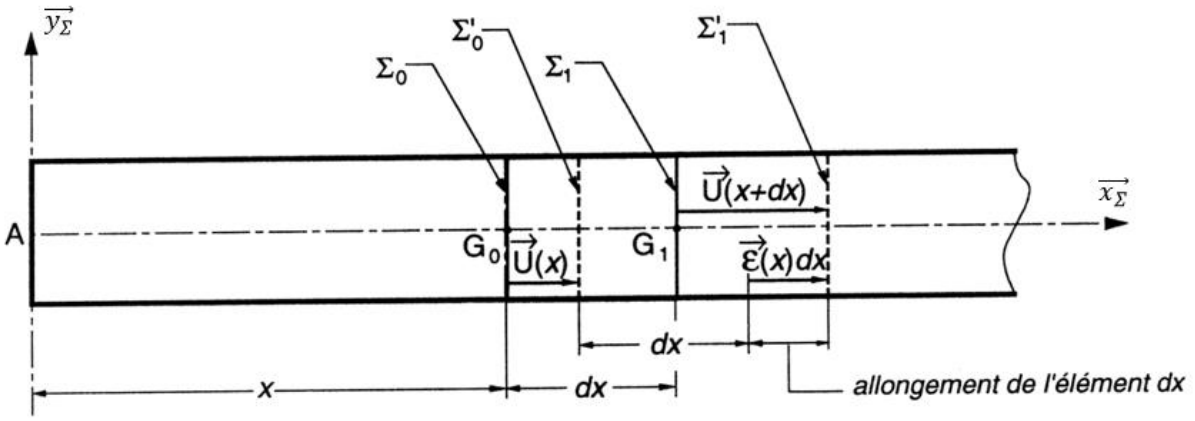
On note que la courbure de la ligne moyenne ne change pas.

On peut donc exprimer le torseur des petits déplacements ainsi :

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\theta}(x) \\ \vec{U}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u(x)\overrightarrow{x_\Sigma} \end{Bmatrix}_G$$

A.VI.1.c Déformations

A.VI.1.c.i Torseur des déformations



Du fait des déplacements identifiés, on peut exprimer le torseur des déformations ainsi :

$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix}\vec{\gamma}(x)\\ \vec{\varepsilon}(x)\end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix}\dfrac{d\vec{\theta}(x)}{dx}\\ \dfrac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma}\Lambda\vec{\theta}(x)\end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix}0\\ \dfrac{du(x)}{dx}\overrightarrow{x_\Sigma}\end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix}0\\ \varepsilon_x\overrightarrow{x_\Sigma}\end{Bmatrix}_G$$

ε_x est appelée « déformation longitudinale » ou « allongement relatif », elle est constante le long de la poutre.

A.VI.1.c.ii Déformation d'une poutre

En considérant une poutre de longueur initiale L_0 encastrée en $x = 0$, on a :

$$du = \varepsilon_x dx$$

$$\int_0^{L_0} du = \int_0^{L_0} \varepsilon_x dx$$

$$u(L_0) - u(0) = \Delta L - 0 = \Delta L = \varepsilon_x L_0$$

Soit :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

A.VI.1.d Contraintes

A.VI.1.d.i Contrainte locale

Connaissant la déformation et en utilisant la loi de Hooke, on a :

$$\vec{C}(M,\overrightarrow{x_\Sigma}) = E\varepsilon_x\overrightarrow{x_\Sigma} = \sigma_{xx}\overrightarrow{x_\Sigma}$$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_x$$

σ_{xx} est donc constante.

A.VI.1.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation

On peut mettre en relation la contrainte locale avec les composantes du torseur de cohésion en rappelant la relation établie précédemment :

$$N = \int_\Sigma \sigma_{xx}\, dS$$

Soit :

$$N = \int_\Sigma \sigma_{xx}\, dS = S\sigma_{xx}$$

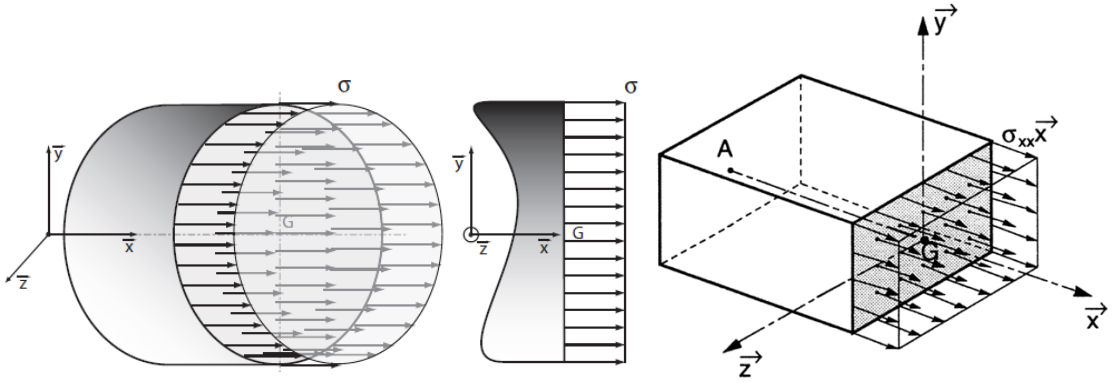
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S}$$

La section variant très peu, on assimile la section courante S à la section initiale avant déformation S_0.

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_0}$$

A.VI.1.d.iii Répartition des contraintes dans une section

La contrainte normale en traction-compression est constante sur la section :



A.VI.1.e Relation Déformation-Sollicitation

On a établi les relations suivantes :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_x \quad ; \quad \sigma_{xx} = \frac{N}{S_0} \quad ; \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

On en déduit la relation souvent utilisée :

$$\Delta L = \varepsilon_x L_0 = \frac{\sigma_{xx} L_0}{E} = \frac{N L_0}{E S_0}$$

$$\Delta L = N \frac{L_0}{E S_0}$$

On note lus généralement, pour une poutre de longueur L et de section S :

$$\Delta L = N \frac{L}{ES}$$

Pour toute section d'abscisse initiale x, on a :

$$\Delta L(x) = N \frac{x}{ES}$$

A.VI.1.f Dimensionnement d'une poutre à la Traction-Compression

A.VI.1.f.i Dimensionnement à la contrainte limite

Afin de rester dans le domaine élastique, la matière doit respecter la condition suivante :

$$\sigma_{max} < Rp_E$$

$$\frac{N}{S} < Rp_E$$

A.VI.1.f.ii Dimensionnement au déplacement

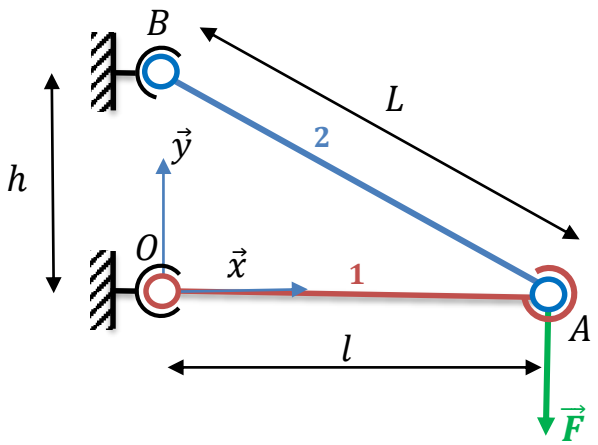
On a :

$$\Delta L = N \frac{L}{ES} < \Delta L_{max}$$

A.VI.1.g Remarque – Structures treillis

Les structures treillis sont des ensembles de barres liées entre elles par des rotules en 3D, pivots en plan. Si des actions extérieures s'appliquent sur les liaisons, chacune des barres n'est soumise qu'à de la traction compression. Il est alors plus simple d'étudier l'équilibre de nœuds (liaisons) plutôt que de chacune des pièces prise séparément.

Exemple :

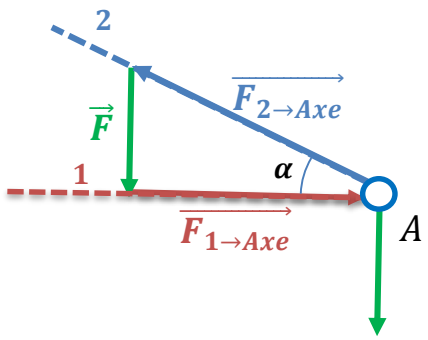


Attention, lors d'une étude statique classique, il faut veiller à ne pas compter deux fois l'action F, on doit choisir si elle s'applique sur la pièce 1, la pièce 2, ou sur une pièce fictive 3 correspondant à un axe sur lequel seraient fixées les pièces 1 et 2.

On sait que chaque pièce est soumise à de la traction compression. Pour le prouver

- On isole par exemple la pièce 1 et on considère que l'effort s'applique sur cette pièce. On regroupe l'action de 2 sur 1 avec F, deux forces dont la somme a un moment nul en A, ce qui revient à 1 effort en A. La pièce 1 est donc soumise à deux forces, l'un en O et l'autre en A. La seconde pièce est soumise elle aussi à 2 glisseurs.
- Soit on imagine une troisième pièce « Axe », sur laquelle il y a l'action de 1 sur l'axe, de 2 sur l'axe, et de F. Alors, chaque barre n'est soumise qu'aux actions de cet axe d'un côté, et de la rotule de l'autre.

Ensuite, il suffit d'isoler en statique le nœud A, ou encore d'isoler un axe fictif sur lequel on a 3 efforts de direction connue, dont un est entièrement défini.



α est défini à l'aide des longueurs données. Les efforts $\vec{F}_{1\to Axe}$ et $\vec{F}_{2\to Axe}$ sont en réalité les efforts des pièces l'une sur l'autre :

$$\vec{F}_{1\to Axe} = \vec{F}_{1\to 2}$$

$$\vec{F}_{2\to Axe} = \vec{F}_{2\to 1}$$

On a donc les relations :

$$\tan\alpha = \frac{F}{F_{1\to 2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{F}{F_{2\to 1}}$$

A.VI.2 Le cisaillement

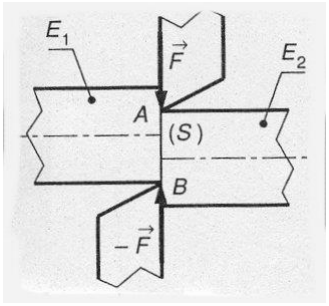
Nous nous limiterons au cisaillement suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$, les résultats étant analogues suivant $\overrightarrow{z_\Sigma}$.

A.VI.2.a Définition

Une poutre ou un tronçon de poutre est soumis à une sollicitation de cisaillement suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$ si et seulement si le torseur des efforts intérieurs en G se présente sous la forme :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$$

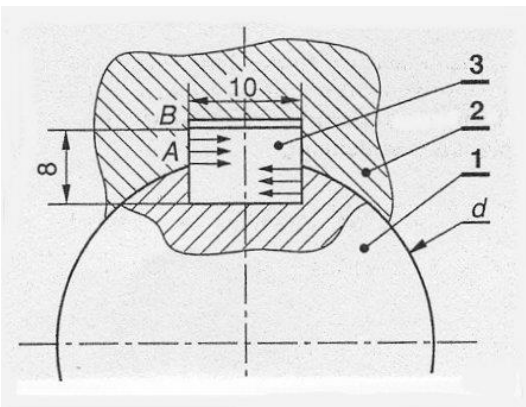
Le cisaillement s'obtient par application de 2 efforts opposés extrêmement rapprochés :

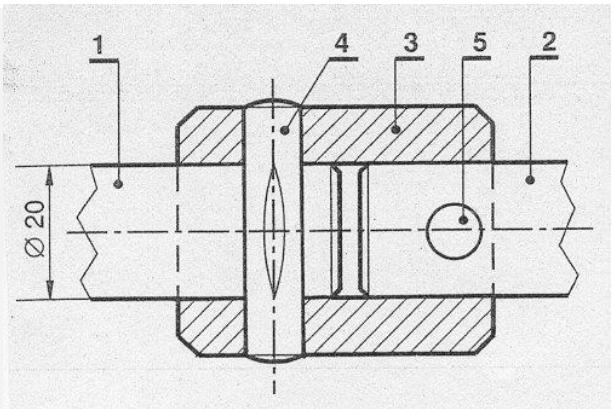


Le torseur associé au cisaillement n'est valable qu'entre les deux efforts.

Le cisaillement parfait seul n'existe pas en réalité. L'écart entre les 2 efforts induit l'apparition d'un moment fléchissant suivant $\overrightarrow{z_\Sigma}$.

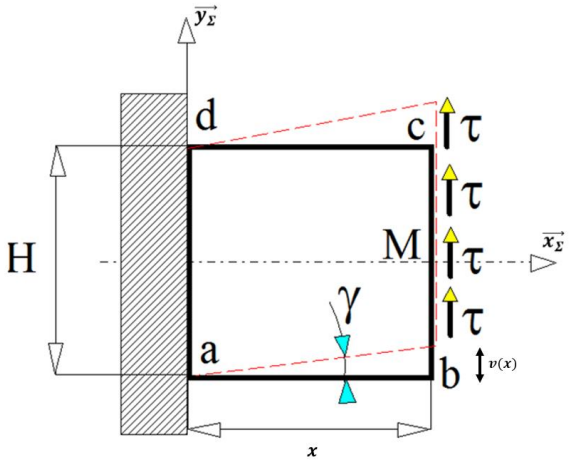
Les clavettes et goupilles peuvent être soumises au cisaillement par exemple.





A.VI.2.b Déplacements

Dans le cas du cisaillement suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$, on observe un glissement des différentes sections suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$.



On peut donc exprimer le torseur des petits déplacements ainsi :

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\theta}(x) \\ \vec{U}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v(x)\overrightarrow{y_\Sigma} \end{Bmatrix}_G$$

A.VI.2.c Déformations

A.VI.2.c.i Torseur des déformations

Du fait des déplacements identifiés, on peut exprimer le torseur des déformations ainsi :

$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(x) \\ \vec{\varepsilon}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{dv(x)}{dx}\overrightarrow{y_\Sigma} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \varepsilon_y \overrightarrow{y_\Sigma} \end{Bmatrix}_G$$

ε_y est appelé « angle de glissement », il est constant le long de la poutre.

A.VI.2.c.ii Déformation d'une poutre

En considérant une poutre de longueur L encastrée en $x = 0$, on a :

$$dv = \varepsilon_y dx$$

$$\int_0^L dv = \int_0^L \varepsilon_y dx$$

$$v(L) - v(0) = V = \varepsilon_y L$$

Soit :

$$\varepsilon_y = \frac{V}{L}$$

A.VI.2.d Contraintes

A.VI.2.d.i Contrainte locale

Connaissant la déformation et en utilisant la loi de Hooke en cisaillement, on a :

$$\vec{C}(M,\overrightarrow{x_\Sigma}) = G\varepsilon_y\overrightarrow{y_\Sigma} = \sigma_{xy}\overrightarrow{y_\Sigma}$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_y$$

A.VI.2.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation

On peut mettre en relation la contrainte locale avec les composantes du torseur de cohésion en rappelant la relation établie précédemment :

$$T_y = \int_\Sigma \sigma_{xy}\, dS$$

En supposant que la contrainte tangentielle est constante sur la section, hypothèse discutable mais prise au premier abord, on obtient :

$$T_y = \int_\Sigma \sigma_{xy}\, dS$$

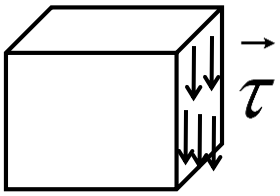
Soit :

$$T_y = \int_\Sigma \sigma_{xy}\, dS = \sigma_{xy} S$$

$$\sigma_{xy} = \frac{T_y}{S}\ ;\ \sigma_{xy}\ supposé\ constante$$

A.VI.2.d.iii Répartition des contraintes dans une section

La contrainte tangentielle de cisaillement est constante sur la section :



A.VI.2.e Relation Déformation-Sollicitation

On a établi les relations suivantes :

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_y \quad ; \quad \sigma_{xy} = \frac{T_y}{S} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{V}{L}$$

On en déduit la relation :

$$\frac{T_y}{S} = G\frac{V}{L}$$

$$V = T_y \frac{L}{GS} \; ; Non\ utilisé\ en\ pratique$$

Attention toutefois, cette relation est très peu utilisée car :

- L'hypothèse de répartition uniforme de σ_{xy} sur la section est discutable.
- En cas de cisaillement, celui-ci étant réalisé sur des longueurs très courtes, cette déformation est très faible.
- En cas de flexion simple (avec effort tranchant), sur une longueur conséquente donc, on étudiera la déformation en flexion, très grande devant cette déformation en cisaillement qui sera donc négligée

A.VI.2.f Dimensionnement d'une poutre au cisaillement

Afin de rester dans le domaine élastique, la matière doit respecter la condition suivante :

$$\tau_{max} < Rp_G$$

$$\frac{T_y}{S} < Rp_G$$

A.VI.3 La torsion

Les résultats de ce paragraphe ne sont valables que pour les poutres cylindriques de révolution. Les sections non circulaires ne respectent pas les hypothèses de ce chapitre.

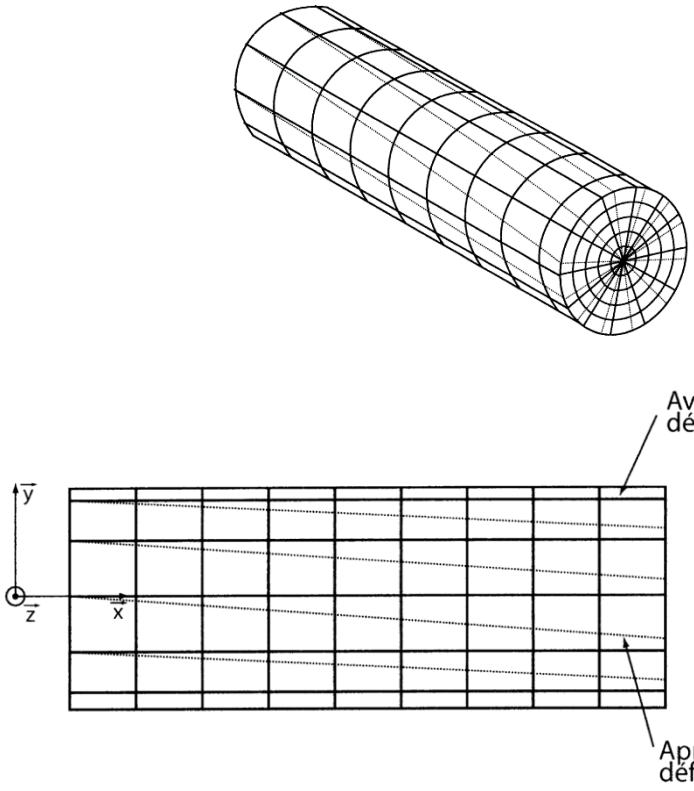
A.VI.3.a Définition

Une poutre ou un tronçon de poutre est soumis à une sollicitation de torsion si et seulement si le torseur des efforts intérieurs en G se présente sous la forme :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t(s) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$$

A.VI.3.b Déplacements

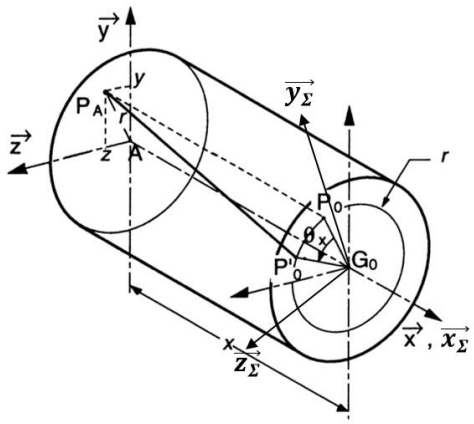
On considère un barreau cylindrique de longueur L encastré à l'une de ses extrémités et soumis à un moment porté par son axe à l'autre extrémité. Si l'on dessine sur la poutre une grille parfaite avant déformation, on remarque après déformation la structure suivante :



On remarque que

- chaque génératrice du cylindre rectiligne avant déformation devient une portion d'hélice. En effet, chaque section à l'abscisse x tourne d'un angle $\theta_x(x)$ autour de l'axe du barreau et cette rotation est proportionnelle à la distance avec la section encastrée :
$$\theta_x(x) = kx$$
- la distance entre deux sections droites données reste sensiblement constante. Il n'y a pas de déformation longitudinale.

Finalement, on observe uniquement une rotation des sections autour de l'axe $\overrightarrow{x_\Sigma}$:



On peut donc exprimer le torseur des petits déplacements ainsi :

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\theta}(x) \\ \vec{U}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \theta_x \overrightarrow{x_\Sigma} \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

A.VI.3.c Déformations

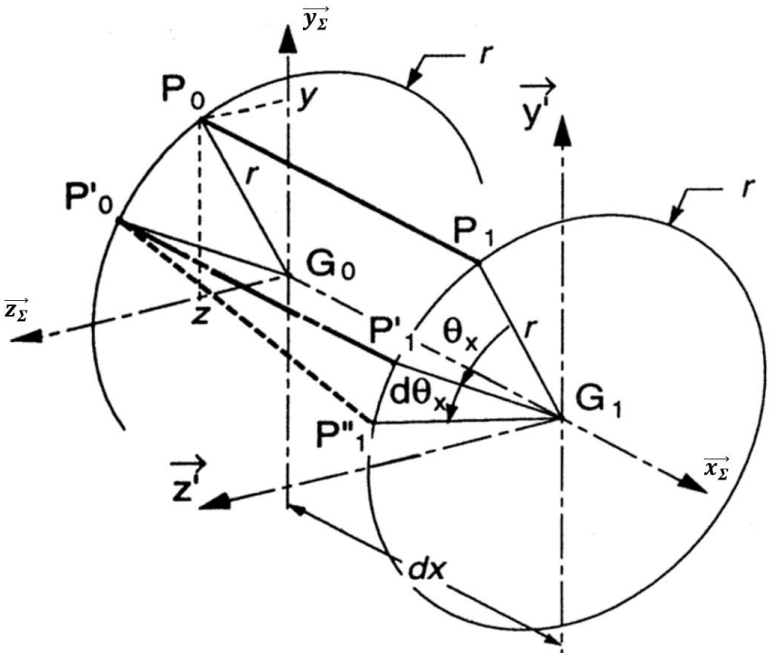
A.VI.3.c.i Torseur des déformations

Du fait des déplacements identifiés, on peut exprimer le torseur des déformations ainsi :

$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(x) \\ \vec{\varepsilon}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\vec{\theta}(x)}{dx} \\ \dfrac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma} \Lambda \vec{\theta}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\theta_x(x)}{dx} \overrightarrow{x_\Sigma} \\ 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \gamma_x \overrightarrow{x_\Sigma} \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

γ_x est appelé « angle unitaire de torsion », il est constant le long de la poutre.

Soit la portion de poutre de longueur dx suivante :



- P_0 et P_1 : Points de la poutre avant déformation.
- $P_0{}'$ et $P_1{}'$: Points P_0 et P_1 issus de la déformation de la poutre avant la section en x.
- $P_1{}''$: Point $P_1{}'$ après déformation du tronçon entre x et $x + dx$.

On peut alors exprimer le torseur des déformations au point P_0 d'une section tel que $\overrightarrow{GP_0} = y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma}$:

$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\theta_x(x)}{dx}\overrightarrow{x_\Sigma} \\ -z\dfrac{d\theta_x(x)}{dx}\overrightarrow{y_\Sigma} + y\dfrac{d\theta_x(x)}{dx}\overrightarrow{z_\Sigma} \end{Bmatrix}_{P_0} = \begin{Bmatrix} \gamma_x\overrightarrow{x_\Sigma} \\ \varepsilon_y\overrightarrow{y_\Sigma} + \varepsilon_z\overrightarrow{z_\Sigma} \end{Bmatrix}_{P_0}$$

La déformation linéaire en P_0 est orthogonale à $\overrightarrow{GP_0}$: $\overrightarrow{GP_0}.\vec{\varepsilon}(x) = -zy\frac{d\theta_x(x)}{dx} + yz\frac{d\theta_x(x)}{dx} = 0$

A.VI.3.c.ii Déformation d'une poutre

La rotation relative de deux sections droites d'abscisses 0 et L peut être déterminée à l'aide de γ_x :

$$d\theta_x(x) = \gamma_x\, dx$$

$$\int_0^L d\theta_x(x) = \int_0^L \gamma_x\, dx$$

$$\theta_x(L) - \theta_x(0) = \Delta\theta - 0 = \Delta\theta = L\gamma_x$$

Soit :

$$\Delta\theta = L\gamma_x$$

$$\gamma_x = \frac{\Delta\theta}{L}$$

A.VI.3.d Contraintes

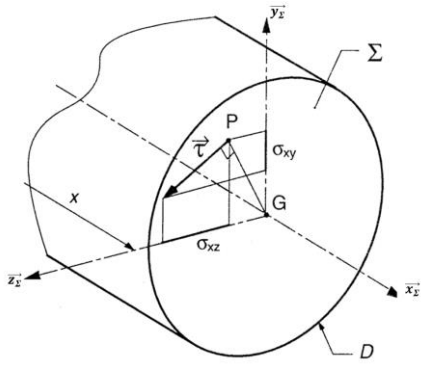
A.VI.3.d.i Contrainte locale

Connaissant la déformation et en utilisant la loi de Hooke en cisaillement, on a :

$$\vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}) = \vec{\tau} = G\vec{\varepsilon}(x) = G\varepsilon_y \overrightarrow{y_\Sigma} + G\varepsilon_z \overrightarrow{z_\Sigma} = \sigma_{xy}\overrightarrow{y_\Sigma} + \sigma_{xz}\overrightarrow{z_\Sigma}$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_y = -Gz\gamma_x$$

$$\sigma_{xz} = G\varepsilon_z = Gy\gamma_x$$



A.VI.3.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation

On peut mettre en relation la contrainte locale avec les composantes du torseur de cohésion en rappelant la relation établie précédemment :

$$M_t = \int_\Sigma (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy})\, dS$$

Soit :

$$M_t = \int_\Sigma (yGy\gamma_x + zGz\gamma_x)\, dS = G\gamma_x \int_\Sigma (y^2 + z^2)\, dS$$

On reconnaît le moment quadratique de la section :

$$I_G = \int_\Sigma (y^2 + z^2)\, dS$$

Soit :

$$M_t = \gamma_x G I_G$$

Soit :

$$\gamma_x = \frac{M_t}{G I_G}$$

D'où :

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_y = -z\frac{M_t}{I_G}$$

$$\sigma_{xz} = G\varepsilon_z = y\frac{M_t}{I_G}$$

Ou encore :

$$\vec{\tau} = \sigma_{xy}\overrightarrow{y_\Sigma} + \sigma_{xz}\overrightarrow{z_\Sigma} = \frac{M_t}{I_G}(-z\overrightarrow{y_\Sigma} + y\overrightarrow{z_\Sigma}) = r\frac{M_t}{I_G}\overrightarrow{e_\theta}$$

Rappel de mathématiques :

- P ayant pour coordonnées (y, z) dans la base locale $\mathfrak{B}_\Sigma$, le vecteur $y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma}$ a un vecteur directeur qui vaut : (y, z) et est porté par $\overrightarrow{e_r}$ tel que $y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma} = r\overrightarrow{e_r}$ avec $r = \|y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma}\|$
- Le vecteur directement normal à $\overrightarrow{e_r}$ (soit $\overrightarrow{e_\theta}$) a un vecteur directeur de coordonnées $(-z, y)$
- De plus : $\|-z\overrightarrow{y_\Sigma} + y\overrightarrow{z_\Sigma}\| = \|y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma}\| = r$
- D'où $-z\overrightarrow{y_\Sigma} + y\overrightarrow{z_\Sigma} = r\overrightarrow{e_\theta}$

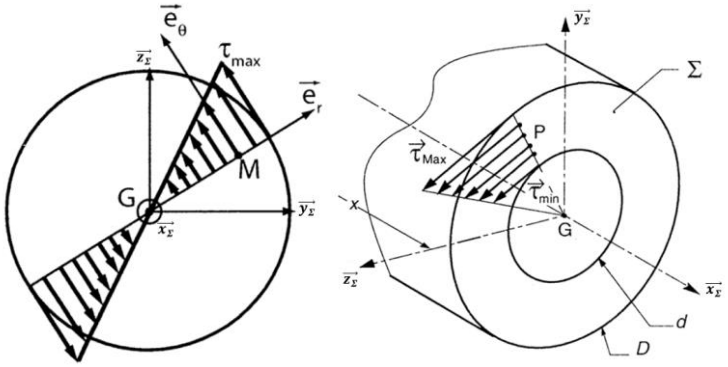
$$r\overrightarrow{e_\theta} = -r\sin\theta\,\overrightarrow{y_\Sigma} + r\cos\theta\,\overrightarrow{z_\Sigma}$$

$$-z\overrightarrow{y_\Sigma} + y\overrightarrow{z_\Sigma} = -r\sin\theta\,\overrightarrow{y_\Sigma} + r\cos\theta\,\overrightarrow{z_\Sigma} = r\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\vec{\tau} = r\frac{M_t}{I_G}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\tau = r\frac{M_t}{I_G} = rG\gamma_x$$

A.VI.3.d.iii Répartition des contraintes dans une section



La contrainte maximale dans une section soumise à de la torsion s'exprime donc en fonction du diamètre de la poutre :

$$\tau_{max} = \frac{D}{2}\frac{M_t}{I_G}$$

A.VI.3.e Relation Déformation-Sollicitation

On a établi les relations suivantes :

$$\tau = rG\gamma_x \quad ; \quad \tau = r\frac{M_t}{I_G} \quad ; \quad \gamma_x = \frac{\Delta\theta}{L}$$

On en déduit la relation :

$$\Delta\theta = L\frac{M_t}{GI_G}$$

A.VI.3.f Dimensionnement d'une poutre à la torsion

A.VI.3.f.i Dimensionnement à la contrainte limite

Afin de rester dans le domaine élastique, la matière doit respecter la condition suivante :

$$\tau_{max} < Rp_G$$

$$\frac{D}{2}\frac{M_t}{I_G} < Rp_G$$

A.VI.3.f.ii Dimensionnement à la rotation

On a :

$$\Delta\theta = M_t\frac{L}{GI_G} < \Delta\theta_{admissible}$$

A.VI.4 La flexion

Dans cette partie, le chargement est considéré dans le plan de symétrie de la poutre droite. On étudie uniquement la flexion présentant un moment fléchissant suivant $\overrightarrow{z_\Sigma}$, les résultats étant analogues suivant $\overrightarrow{y_\Sigma}$ au signe près.

A.VI.4.a Définition

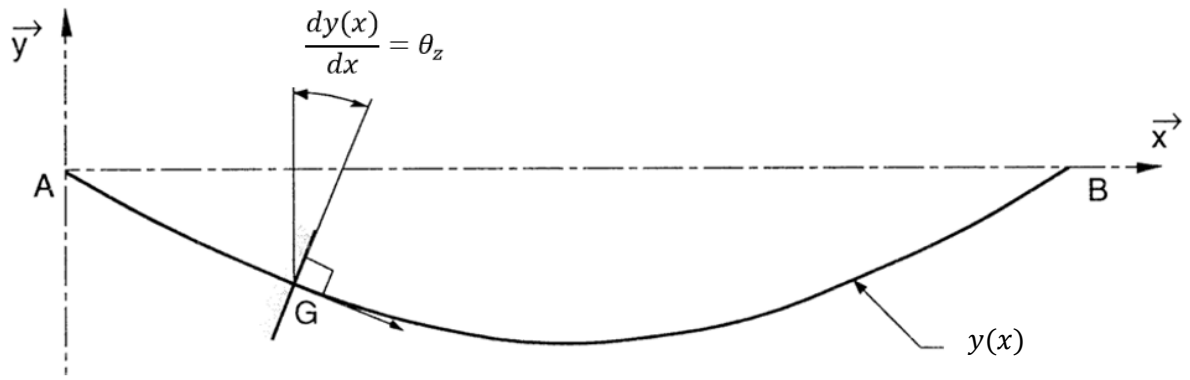
Une poutre ou un tronçon de poutre est soumis à une sollicitation de flexion si et seulement si le torseur des efforts intérieurs en G se présente sous la forme :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y(s) & 0 \\ 0 & M_{f_z}(s) \end{Bmatrix}_G^{\mathcal{B}_\Sigma}$$

Si $T_y(s) = 0$, on parle de flexion pure, si $T_y(s) \neq 0$, on parle de flexion simple.

A.VI.4.b Déplacements

La figure suivante présente une poutre déformée suite à une sollicitation de flexion.



Hypothèses :

- Les effets du cisaillement (sur la déformation) sont négligés par rapport aux effets issus de la flexion. Le déplacement $y(x)$ est donc le déplacement uniquement due à la flexion. Cela n'empêchera pas la présence de contraintes en cisaillement dans la poutre dont il faudra tenir compte pour le dimensionnement
- Le déplacement du centre G des sections droites est caractérisé par une translation $y(x)\vec{y}$ et on note donc $y(x)$ l'équation de la déformée de la ligne moyenne de la poutre.
- Les sections droites de centre G tournent autour de l'axe $(G, \vec{z})$ d'un angle θ_z
- Dans le cadre des petites déformations, on a : $\theta_z = \frac{dy}{dx}$

On exprime alors le torseur des petits déplacements :

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\theta}(x) \\ \vec{U}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \theta_z \overrightarrow{z_\Sigma} \\ y\vec{y} \end{Bmatrix}_G$$

y est appelée la flèche de la poutre.

A.VI.4.c Déformations

A.VI.4.c.i Torseur des déformations

Connaissant le torseur des petits déplacements, on obtient le torseur des déformations en G:

$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(x) \\ \vec{\varepsilon}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{\theta}(x)}{dx} \\ \frac{d\vec{U}(x)}{dx} + \overrightarrow{x_\Sigma} \Lambda \vec{\theta}(x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \frac{d\theta_z}{dx} \overrightarrow{z_\Sigma} \\ \frac{dy}{dx}\vec{y} - \theta_z \overrightarrow{y_\Sigma} \end{Bmatrix}_G$$

Dans le cadre des petites déformations, on suppose :

$$\vec{y} = \overrightarrow{y_\Sigma} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \theta_z \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\vec{y} - \theta_z \overrightarrow{y_\Sigma} = \vec{0}$$

Soit :

$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix} \gamma_z \overrightarrow{z_\Sigma} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

La fibre moyenne, ou fibre neutre, ne se déforme pas.

Exprimons ce torseur en un point P quelconque de la section en G tel que $\overrightarrow{GP} = y_\Sigma \overrightarrow{y_\Sigma} + z_\Sigma \overrightarrow{z_\Sigma}$

$$\{\varepsilon(x)\} = \begin{Bmatrix} \gamma_z \overrightarrow{z_\Sigma} \\ -y_\Sigma \gamma_z \overrightarrow{x_\Sigma} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} \gamma_z \overrightarrow{z_\Sigma} \\ \varepsilon_x \overrightarrow{x_\Sigma} \end{Bmatrix}_P$$

A.VI.4.c.ii Déformation d'une poutre

Contrairement aux sollicitations précédentes, la déformation de la poutre n'est pas intégrable de manière immédiate.

A.VI.4.d Contraintes

A.VI.4.d.i Contrainte locale

Connaissant les déformations et en utilisant la loi de Hooke, on a :

$$\vec{C}(M, \overrightarrow{x_\Sigma}) = E\varepsilon_x \overrightarrow{x_\Sigma} = \sigma_{xx} \overrightarrow{x_\Sigma}$$

Rappel : on a négligé l'effet de cisaillement sur la déformation, le terme σ_{xy} n'apparaît donc pas. Il faudra toutefois tenir compte de la contrainte en cisaillement pour le dimensionnement de la poutre.

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_x = -Ey_\Sigma \frac{d\theta_z}{dx} = -Ey_\Sigma \frac{d^2y}{dx^2} = -Ey_\Sigma y''(x)$$

A.VI.4.d.ii Relation Contrainte/Sollicitation

On peut mettre en relation la contrainte locale avec les composantes du torseur de cohésion en rappelant la relation établie précédemment :

$$M_{f_z} = -\int_\Sigma y_\Sigma \sigma_{xx}\, dS$$

Soit :

$$M_{f_z} = \int_\Sigma y_\Sigma E y_\Sigma y''(x)\, dS = Ey''(x) \int_\Sigma {y_\Sigma}^2\, dS$$

On reconnaît le moment quadratique de la section :

$$I_{G_z} = \int_\Sigma {y_\Sigma}^2\, dS$$

$$M_{f_z} = EI_{G_z} y''(x)$$

Soit :

$$y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$$

L'intégration de cette équation permet, connaissant les conditions cinématiques imposées à la poutre par le biais des liaisons, de déterminer l'équation de la déformée de la poutre.

Remarque : Soit R le rayon de courbure local de la déformée. On a :

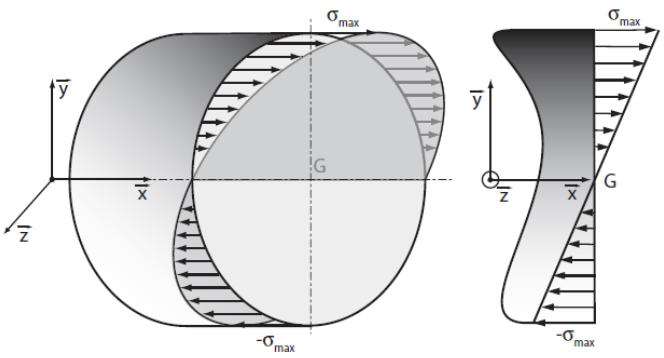
$$M_{f_z} = \frac{EI_{G_z}}{R}$$

On peut finalement exprimer la contrainte normale en fonction du moment fléchissant :

$$\sigma_{xx} = -Ey_\Sigma y''(x) = -Ey_\Sigma \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$$

$$\sigma_{xx} = -y_\Sigma \frac{M_{f_z}}{I_{G_z}}$$

A.VI.4.d.iii Répartition des contraintes dans une section



La contrainte maximale dans la poutre vaut :

$$\sigma_{max} = \frac{D}{2}\frac{M_{f_z}}{I_{G_z}}$$

A.VI.4.e Relation Déformation-Sollicitation

Dans le cas de la flexion, deux déformations sont importantes :

- la flèche :

  $$y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$$

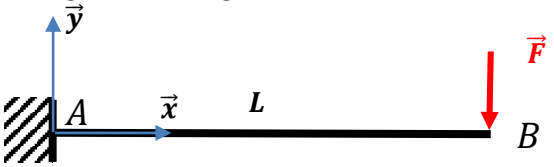
  Il n'y a pas de relation immédiate entre déformation et sollicitation. Il est nécessaire de déterminer la flèche de la poutre $y(x)$ à l'aide de l'équation liant sa dérivée seconde au moment fléchissant et en utilisant, d'une part les conditions aux limites, d'autre part la continuité des poutres entre les différents tronçons.
- la rotation locale de la section :

  $$\theta_z(x) = y'(x)$$

  Bien que la rotation n'induise pas directement de mouvement de points de la fibre neutre, elle induit un mouvement de tout point de la section qui sera très souvent utile.

A.VI.4.f Calcul de la déformée d'une poutre

Soit la poutre suivante de section rectangulaire de largeur b et de hauteur h dans le sens de l'effort:



$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(L-x) \end{Bmatrix}^B_M$$

$y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$ $EI_{G_z}y''(x) = -F(L-x)$ $EI_{G_z}y''(x) = F(x-L)$ EI_{g_z} étant constant : $EI_{G_z}y'(x) = F\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + k_1$	$y'(0) = y(0) = 0$ $EI_{G_z}y(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2}\right)$	$I_{G_z} = \frac{bh^3}{12}$
$EI_{G_z}y(x) = F\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2}\right) + k_1x + k_2$	$EI_{G_z}y(L) = -\frac{FL^3}{3}$ $\delta = -\frac{FL^3}{3EI_{g_z}}$	$\delta = -\frac{4FL^3}{Ebh^3}$

A.VI.4.g Dimensionnement d'une poutre à la flexion

A.VI.4.g.i Dimensionnement à la contrainte

Afin de rester dans le domaine élastique, la matière doit respecter la condition suivante :

$$\sigma_{max} < Rp_E$$

$$\frac{D}{2}\frac{M_{f_z}}{I_{G_z}} < Rp_E$$

A.VI.4.g.ii Dimensionnement à la flèche maximale

A partie de l'équation $y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$ et des conditions aux limites sur $y(x)$ et/ou $y'(x)$, on détermine $y(x)$ puis on exprime la condition :

$$y(x) < v_{admissible}$$

A.VI.4.h Remarque

Attention, un moment fléchissant suivant $\vec{z}$ positif induit une dérivée seconde positive de $y(x)$.

$$y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$$

Cependant, un moment fléchissant suivant $\vec{y}$ positif induit une dérivée seconde négative de $z(x)$.

$$z''(x) = -\frac{M_{f_y}}{EI_{G_y}}$$

De même, il y a un signe qui diffère sur les rotations des sections droites :

$$\theta_y(x) = -z'(x)$$

$$\theta_z(x) = y'(x)$$

A.VI.5 Tronçons de poutres et continuité

Quelle que soit la sollicitation étudiée, dès lors qu'il y a n tronçons dont les interfaces sont en $x = x_i$, la déformée étudiée $f(x)$ s'exprimera d'une manière différente dans chaque tronçon $f_i(x)$ tel que:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x)\ \forall x \epsilon]0, x_1[\\ \dots \\ f_i(x)\ \forall x \epsilon]x_{i-1}, x_i[\\ \dots \\ f_n(x)\ \forall x \epsilon]x_{n-1}, x_n[\end{cases}$$

Il y aura alors continuité de la poutre, soit les conditions limites suivantes :

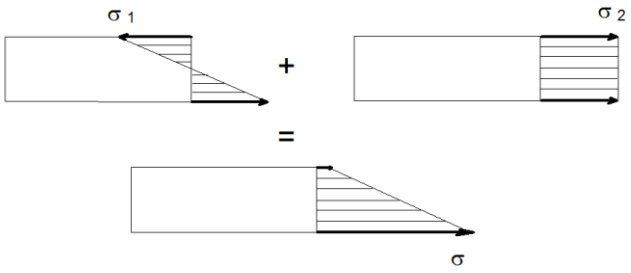
$$\begin{cases} f_2(x_1) = f_1(x_1) \\ \dots \\ f_i(x_{i-1}) = f_{i-1}(x_{i-1}) \\ \dots \\ f_n(x_{n-1}) = f_{n-1}(x_{n-1}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} {f_2}'(x_1) = {f_1}'(x_1) \\ \dots \\ {f_i}'(x_{i-1}) = {f_{i-1}}'(x_{i-1}) \\ \dots \\ {f_n}'(x_{n-1}) = {f_{n-1}}'(x_{n-1}) \end{cases}$$

A.VI.6 Sollicitations composées

Dans la réalité, les poutres sont soumises à des cas de chargements complexes. On peut, dans certains cas, décomposer une sollicitation complexe par une superposition de sollicitations simples.

A.VI.6.a Cas des contraintes normales

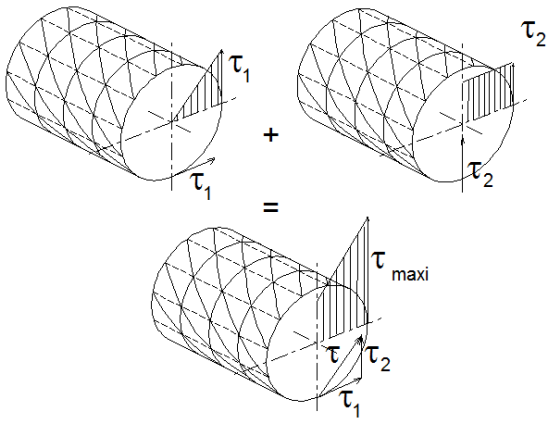
Les contraintes normales s'ajoutent algébriquement. Prenons l'exemple de deux sollicitations composées, la traction et la flexion :



A.VI.6.b Cas des contraintes tangentielles

Les contraintes tangentielles s'ajoutent vectoriellement.

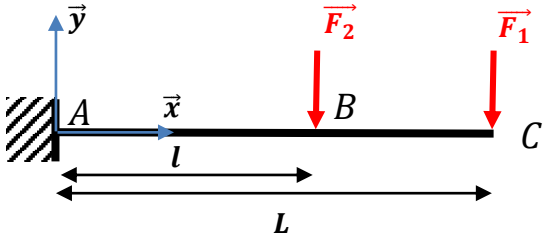
Prenons l'exemple de deux sollicitations composées, la torsion et le cisaillement :



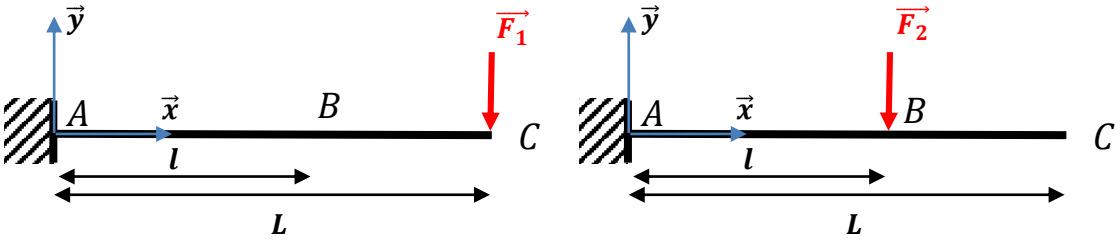
A.VI.7 Principe de superposition

La théorie des poutres étant linéaire, les effets de différentes charges se cumulent. Il est donc possible d'appliquer le principe de superposition.

Exemple : Soit la poutre suivante soumise à deux charges F_1 et F_2 :



On peut décomposer ce problème en deux problèmes dont nous connaissons la solution :



Nous avons démontré que la déformée d'une poutre encastrée soumise à une action $\vec{F} = -F\vec{y}$ à une distance L de l'encastrement vaut :

$$y(x) = \frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2}\right)$$

On a donc :

	Problème 1	Problème 2
AB	$y_1{}^{AB}(x) = \frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2}\right)$	$y_2{}^{AB}(x) = \frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3}{6} - l\frac{x^2}{2}\right)$

BC	$y_1{}^{BC}(x)=\frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3}{6}-L\frac{x^2}{2}\right)$	$EI_{G_z}y_2{}^{BC''}(x)=0$ $y_2{}^{BC'}(x)=k_1$ $y_2{}^{BC}(x)=k_1x+k_2$ $y_2{}^{AB}(l)=y_2{}^{BC}(l)$ $y_2{}^{AB'}(l)=y_2{}^{BC'}(l)$ $k_1l+k_2=-\frac{Fl^3}{3EI_{G_z}}$ $k_1=-\frac{Fl^2}{2EI_{G_z}}$ $k_2=-\frac{Fl^3}{3EI_{G_z}}+\frac{Fl^3}{2EI_{G_z}}$ $k_2=\frac{Fl^3}{6EI_{G_z}}$ $y_2{}^{BC}(x)=-\frac{Fl^2}{2EI_{G_z}}x+\frac{Fl^3}{6EI_{G_z}}$ $y_2{}^{BC}(x)=\frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{l^3}{6}-\frac{l^2x}{2}\right)$

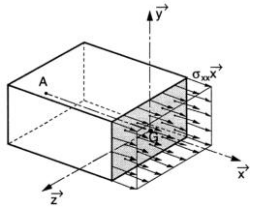
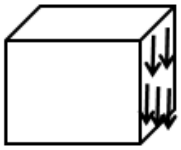
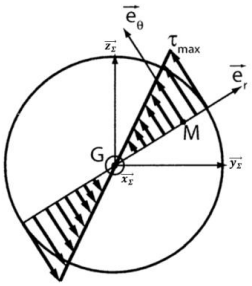
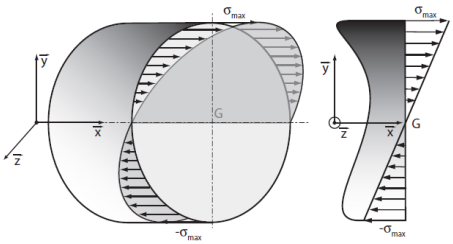
Finalement, on a :

$$\begin{cases} y^{AB}(x)=y_1{}^{AB}(x)+y_2{}^{AB}(x)=\frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3}{6}-L\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-l\frac{x^2}{2}\right) \\ y^{BC}(x)=y_1{}^{BC}(x)+y_2{}^{BC}(x)=\frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3}{6}-L\frac{x^2}{2}+\frac{l^3}{6}-\frac{l^2x}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{AB}(x)=\frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3}{3}-(L+l)\frac{x^2}{2}\right) \\ y^{BC}(x)=\frac{F}{EI_{G_z}}\left(\frac{x^3+l^3}{6}-\frac{Lx^2+l^2x}{2}\right) \end{cases}$$

A.VI.8 Bilan

Certains résultats du tableau ci-dessous ne sont valables que pour des poutres à section constante.

Traction Compression	Cisaillement	Torsion	Flexion	
$\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$	$\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{f_y} \\ T_z & 0_z \end{Bmatrix}^{\mathcal{B}_\Sigma}_{G}$
$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_0}$	$\sigma_{xy} = \frac{T_y}{S}$ $\sigma_{xz} = \frac{T_z}{S}$	$\tau = r\frac{M_t}{I_G} = rG\gamma_x$ $\gamma_x = \frac{d\alpha}{dx}$	$\sigma_{xx} = -y\frac{M_{f_z}}{I_{G_z}} + z\frac{M_{f_y}}{I_{G_y}}$	
$\Delta L(x) = N\frac{x}{ES}$ $\Delta L = \frac{NL}{ES}$	$V_y = T_y\frac{L}{GS}$ $V_z = T_z\frac{L}{GS}$	$\Delta\theta = L\frac{M_t}{GI_G}$	$y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$ $\theta_z(x) = y'(x)$	$z''(x) = -\frac{M_{f_y}}{EI_{G_y}}$ $\theta_y(x) = -z'(x)$
				

A.VII. Les problèmes hyperstatiques

A.VII.1 Introduction

Au chapitre d'analyse des mécanismes, nous avons appris à calculer le degré d'hyperstatisme des mécanismes **indéformables** et nous avons vu que si un mécanisme était hyperstatique, il devenait impossible de déterminer toutes les inconnues de liaisons. Nous avons montré que chaque degré d'hyperstatisme traduit une condition géométrique à respecter.

A présent, dans le cas des poutres, nous connaissons la relation entre les efforts dans une poutre et ses déformations. Nous allons voir qu'il devient possible d'ajouter aux problèmes hyperstatiques les équations manquantes permettant de déterminer toutes les inconnues de liaisons en prenant en compte le comportement des structures étudiées et la compatibilité des déplacements issus des déformations de chaque pièce.

Tout problème hyperstatique ne l'est que parce que les pièces sont supposées indéformables. La prise en compte de la déformation des pièces permet de lever l'hyperstatisme.

Dans le cadre du programme, seuls les mécanismes à 1 degré d'hyperstatisme sont étudiés. Attention toutefois, un mécanisme hyperstatique de degré 3 peut être vu comme un mécanisme à 3 fois 1 degré d'hyperstatisme à lever…

A.VII.2 Méthode de résolution

Pour résoudre un problème hyperstatique à l'aide de la RDM, considérons ici une poutre telle que h=1, il convient de procéder ainsi :

- Calculer h et identifier les causes de l'hyperstatisme :
  - hyperstatisme en effort : on s'intéresse à la translation associée
  - hyperstatisme en moment : on s'intéresse à la rotation associée
- Isoler le solide et déterminer le système d'équations statique du problème
- L'hyperstatisme étant toujours issu d'au moins deux liaisons redondantes, « en trop », identifier l'une des deux liaisons à son origine (ce choix influence la suite) et son inconnue statique associée
- Identifier la sollicitation à étudier et rappeler la formule permettant de mettre en relation les éléments de réduction du torseur de cohésion avec la déformation de la poutre.
- Proposer la relation géométrique imposée par la liaison identifiée précédemment, à l'origine du degré d'hyperstatisme
- Exprimer les inconnues du problème statique associées à la sollicitation étudiée en fonction de l'inconnue associée à cette liaison
- Exprimer les éléments de réduction du torseur de cohésion associés à la déformation étudiée en fonction de l'inconnue statique indéterminée et des données du problème (charges extérieures et géométrie)
- Se ramener à un problème isostatique : refaire le schéma du système en supprimant **le degré de liberté** de la liaison associée à l'inconnue statique choisie précédemment tout en gardant comme effort extérieur la composante statique associée. En général, cela revient à supprimer la liaison si c'est une ponctuelle, ou une autre liaison si on peut négliger d'autres composantes.

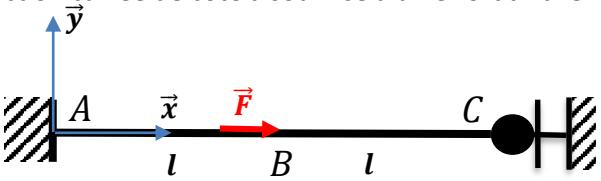
- Déterminer l'équation de la déformée de la poutre pour la sollicitation étudiée en fonction de l'effort inconnu.
- Ecrire l'équation traduisant la condition géométrique imposée par le DDL de la liaison supprimée :
    - Soit la liaison était entre la pièce étudiée et le bâti, on obtient alors une condition de déplacement ou de rotation nulle
    - Soit la liaison était entre la pièce étudiée et une autre pièce du mécanisme, on met alors en place une équation de compatibilité des déplacements des deux pièces issue des déplacements et/ou déformations de celles-ci, par exemple même rotation dans les deux pièces etc.
- Regrouper les 6 équations du problème initial et y ajouter la nouvelle équation, puis résoudre.
- Enfin, si nécessaire, étudier les contraintes et déformations dans la poutre connaissant les différents efforts extérieurs appliqués en utilisant les résultats intermédiaires obtenus lors de la résolution.

A.VII.3 Applications

Les cas d'hyperstatisme les plus rencontrés sont l'hyperstatisme lié à la traction-compression et à la flexion.

A.VII.3.a Traction-Compression

Soit la poutre suivante de section carrée de côté a soumise à un effort axial en B:



Objectif : Déterminer toutes les actions des liaisons.

• **<u>H, hyperstatisme, liaison « en trop » et inconnue statique associée :</u>**

$$h = m + I_S - E_S = 0 + 7 - 6 = 1$$

Le degré d'hyperstatisme est une translation suivant $\vec{x}$.

On identifie la liaison « en trop » en C (choix) : Inconnue X_C

• **<u>Isolement</u>**

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}^B_A + \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_B + \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_C = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}^B_A + \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_A + \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_A = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A + F + X_C = 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \end{cases}$$

$$X_A + X_C = -F$$

- **<u>Sollicitation et déformation liée à l'hyperstatisme</u>**

L'hyperstatisme en effort suivant $\vec{x}$ nous conduit à étudier la sollicitation de Traction-Compression et à déterminer la déformation de la poutre en translation suivant $\vec{x}$.

Traction compression : $\Delta L = \frac{NL}{ES}$

- **<u>Relation géométrique imposée par la liaison « en trop »</u>**

$$u(2l) = 0$$

- **<u>Inconnues statiques en fonction d'une autre</u>**

On choisit d'exprimer toutes les inconnues statiques en fonction de X_C et des données du problème :

$$X_A = -X_C - F$$

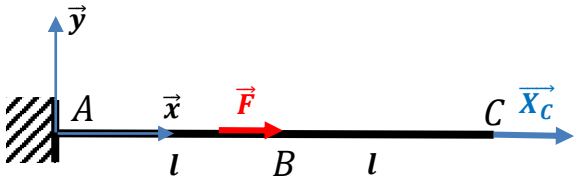
- **<u>Torseur de cohésion</u>**

On exprime alors le torseur de cohésion dans les 2 tronçons en fonction de Y_C et des données du problème :

Tronçon 1 : AB - $x \in]0; l[$	Tronçon 2 : BC - $x \in]l; 2l[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 2}\}$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_B + \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_C$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} F + X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_M$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 2}\}$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_C$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_M$

- **<u>Problème isostatique associé</u>**

On supprime la liaison en C :



- **Equation de la déformée**

$$\Delta L = u(x) - u(0) = u(x) = N\frac{x}{ES}$$

$$\Delta L_1(x) = u_1(x) - u_1(0) = N\frac{x}{ES}$$
$$u_1(0) = 0$$
$$u_1(x) = N_1\frac{x}{ES}$$
$$u_1(x) = (F + X_C)\frac{x}{ES}$$
$$u_1(l) = (F + X_C)\frac{l}{ES}$$

$$\Delta L_2(x) = u_2(x) - u_2(l) = N\frac{x-l}{ES}$$
$$u_2(x) - u_2(l) = X_C\frac{x-l}{ES}$$

Continuité de la poutre :

$$u_2(l) = u_1(l)$$
$$u_2(x) = u_1(l) + X_C\frac{x-l}{ES}$$
$$u_2(x) = (F + X_C)\frac{l}{ES} + X_C\frac{x-l}{ES}$$
$$u_2(x) = F\frac{l}{ES} + X_C\frac{x}{ES}$$

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x)\ \forall x\epsilon]0, l[\\ u_2(x)\ \forall x\epsilon]l, 2l[\end{cases}$$

$$u_2(x) = F\frac{l}{ES} + X_C\frac{x}{ES}$$

- **Nouvelle équation – Compatibilité des déplacements**

$$u(2l) = u_2(2l) = 0$$

$$u_2(2l) = F\frac{l}{ES} + X_C\frac{2l}{ES} = 0$$

$$F + 2X_C = 0$$

- **Equations et résolution**

$$\begin{cases} X_A + F + X_C = 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \\ F + 2X_C = 0 \end{cases}$$

$$X_C = -\frac{F}{2}$$

$$X_A = -F - X_C$$

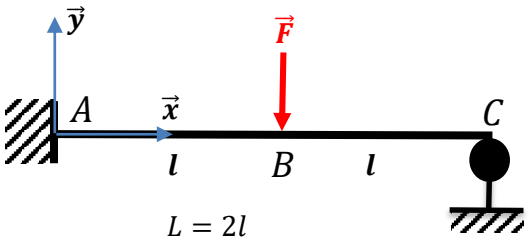
$$X_A = -\frac{F}{2}$$

- **Obtention de la déformation en un point si nécessaire**

$$u_2(x) = F\frac{l}{ES} + X_C\frac{x}{ES} = \frac{2Fl}{2ES} - \frac{F}{2}\frac{x}{ES} = \frac{Fl}{2ES}(2l - x)$$

A.VII.3.b Flexion

Soit la poutre suivante de section rectangulaire de largeur b et de hauteur h dans le sens de l'effort:



Objectif : Déterminer la flèche de la poutre en B.

- **<u>H, hyperstatisme, liaison « en trop » et inconnue statique associée :</u>**

$$h = m + I_S - E_S = 0 + 7 - 6 = 1$$

Le degré d'hyperstatisme est une translation suivant $\vec{y}$.

On identifie la liaison « en trop » en C (choix) : Inconnue Y_C

- **<u>Isolement</u>**

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}^B_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_C = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}^B_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -Fl \end{Bmatrix}^B_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 2lY_C \end{Bmatrix}^B_C = \{0\}$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A - F + Y_C = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A - Fl + 2lY_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A + Y_C = F \\ N_A + 2lY_C = Fl \end{cases}$$

- **<u>Sollicitation et déformation liée à l'hyperstatisme</u>**

L'hyperstatisme en translation suivant $\vec{y}$ nous conduit à étudier la sollicitation en flexion et à déterminer la déformation de la poutre en translation suivant $\vec{y}$.

Flexion : $y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{g_z}}$

- **<u>Relation géométrique imposée par la liaison « en trop »</u>**

$$y(2l) = y_2(2l) = 0$$

- **Inconnues statiques en fonction d'une autre**

On choisit d'exprimer toutes les inconnues statiques en fonction de Y_C et des données du problème :

$$\begin{cases} Y_A = F - Y_C \\ N_A = Fl - 2lY_C \end{cases}$$

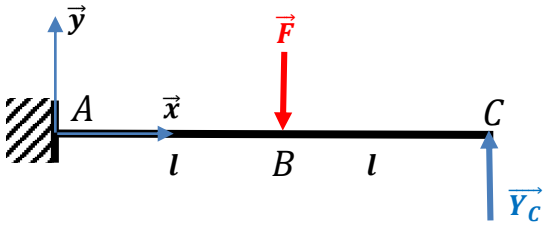
- **Torseur de cohésion**

On exprime alors le torseur de cohésion dans les 2 tronçons en fonction de Y_C et des données du problème :

Tronçon 1 : AB - $x \in]0; l[$	Tronçon 2 : BC - $x \in]l; 2l[$
$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 2}\}$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_C$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F + Y_C & 0 \\ 0 & x(F - Y_C) + l(2Y_C - F) \end{Bmatrix}^B_M$ $-F(l - x) + Y_C(2l - x) = x(F - Y_C) + l(2Y_C - F)$	$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 2}\}$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}^B_C$ $\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & Y_C(2l - x) \end{Bmatrix}^B_M$

- **Problème isostatique associé**

On supprime la liaison en C :



- **Equation de la déformée**

$$y''(x) = \frac{M_{f_z}}{EI_{g_z}}$$

Tronçon 1	Tronçon 2
$EI_{g_z} y_1''(x) = M_{f_{z_1}}$ $EI_{g_z} y_1''(x) = x(F - Y_C) + l(2Y_C - F)$ EI_{g_z} étant constant : $EI_{g_z} y_1'(x) = x^2 \frac{F - Y_C}{2} + xl(2Y_C - F) + k^1{}_1$ $EI_{g_z} y_1(x) = x^3 \frac{F - Y_C}{6} + x^2 \frac{l(2Y_C - F)}{2} + k^1{}_1 x + k^2{}_1$ Liaison prise en compte : $y_1(0) = k^2{}_1 = 0$ $y_1'(0) = k^1{}_1 = 0$	$EI_{g_z} y_2''(x) = M_{f_{z_2}}$ $EI_{g_z} y_2''(x) = -xY_C + 2lY_C$ EI_{g_z} étant constant : $EI_{g_z} y_2'(x) = -x^2 \frac{Y_C}{2} + x2lY_C + k^1{}_2$ $EI_{g_z} y_2(x) = -x^3 \frac{Y_C}{6} + x^2 lY_C + k^1{}_2 x + k^2{}_2$ Continuité de la poutre $y_2(l) = y_1(l)$ $y_2'(l) = y_1'(l)$

$$EI_{g_z} y_1(x) = x^3 \frac{F - Y_C}{6} + x^2 \frac{l(2Y_C - F)}{2}$$

Données utiles pour la suite :

$$y_1(l) = \frac{l^3}{6EI_{g_z}}(5Y_C - 2F)$$
$$y_1'(l) = \frac{l^2}{2EI_{g_z}}(3Y_C - F)$$

$$y_2(l) = \frac{1}{EI_{g_z}}\left[l^3 \frac{5Y_C}{6} + k^1{}_2 l + k^2{}_2\right]$$
$$y_2'(l) = \frac{1}{2EI_{g_z}}[3Y_C l^2 + 2k^1{}_2]$$

$$\frac{l^3}{6EI_{g_z}}(5Y_C - 2F) = \frac{1}{EI_{g_z}}\left[l^3 \frac{5Y_C}{6} + k^1{}_2 l + k^2{}_2\right]$$
$$\frac{1}{2EI_{g_z}}[3Y_C l^2 + 2k^1{}_2] = \frac{l^2}{2EI_{g_z}}(3Y_C - F)$$
$$k^2{}_2 = \frac{Fl^3}{6}$$
$$k^1{}_2 = \frac{-Fl^2}{2}$$
$$EI_{g_z} y_2(x) = -x^3 \frac{Y_C}{6} + x^2 l Y_C - \frac{Fl^2}{2} x + \frac{Fl^3}{6}$$

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x)\ \forall x \epsilon]0, l[\\ y_2(x)\ \forall x \epsilon]l, 2l[\end{cases}$$

- **<u>Nouvelle équation – Compatibilité des déplacements</u>**

$$y(2l) = y_2(2l) = 0$$

$$EI_{g_z} y_2(2l) = -8l^3 \frac{Y_C}{6} + 4l^2 l Y_C - \frac{Fl^2}{2} 2l + \frac{Fl^3}{6}$$

$$y_2(2l) = \frac{l^3}{6EI_{g_z}}(16Y_C - 5F)$$

$$\frac{l^3}{6EI_{g_z}}(16Y_C - 5F) = 0$$

Soit :

$$16Y_C - 5F = 0$$

- **<u>Equations et résolution</u>**

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A - F + Y_C = 0 \\ Z_A = 0 \\ L_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A - Fl + 2lY_C = 0 \\ 16Y_C - 5F = 0 \end{cases}$$

$Y_C = \frac{5}{16}F$	$Y_A = F - \frac{5}{16}F = \frac{11}{16}F$	$N_A = Fl - 2l\frac{5}{16}F = \frac{6}{16}Fl$
	$Y_A = \frac{11}{16}F$	$N_A = \frac{3}{8}Fl$

- **Obtention de la déformation en un point si nécessaire**

Flèche de la poutre en B :

$$y_2(x) = \frac{1}{EI_{g_z}}\left[-x^3\frac{Y_C}{6} + x^2 l Y_C - \frac{Fl^2}{2}x + \frac{Fl^3}{6}\right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI_{g_z}}\left[-x^3\frac{\frac{5}{16}F}{6} + x^2 l\frac{5}{16}F - \frac{Fl^2}{2}x + \frac{Fl^3}{6}\right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI_{g_z}}\left[-x^3\frac{5F}{96} + x^2 l\frac{30}{96}F - \frac{48Fl^2}{96}x + \frac{16Fl^3}{96}\right]$$

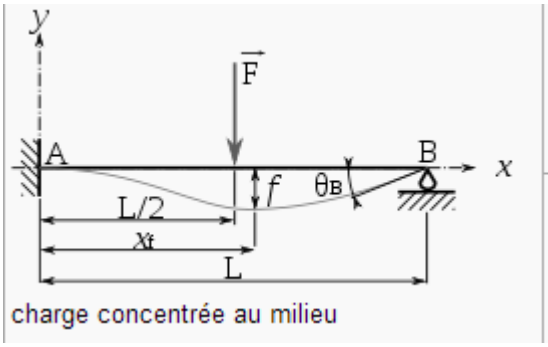
$$y_2(x) = \frac{F}{96EI_{g_z}}[-5x^3 + 30lx^2 - 48l^2x + 16l^3]$$

$$y_2(l) = \frac{Fl^3}{96EI_{g_z}}[-5 + 30 - 48 + 16]$$

$$y_2(l) = -\frac{7Fl^3}{96EI_{g_z}}$$

$$y_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{7FL^3}{768EI_{g_z}}$$

Résultat des formulaires : Lien



charge concentrée au milieu

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{7FL^3}{768EI}$$

$$x_f \simeq 0{,}552\,5L$$

$$\theta_B = \frac{FL^2}{32EI}$$

A.VII.4 Remarque

Les problèmes hyperstatiques faisant intervenir plusieurs actions extérieures, il est souvent possible d'utiliser le principe de superposition afin de simplifier les calculs.

A.VIII. Cas particuliers

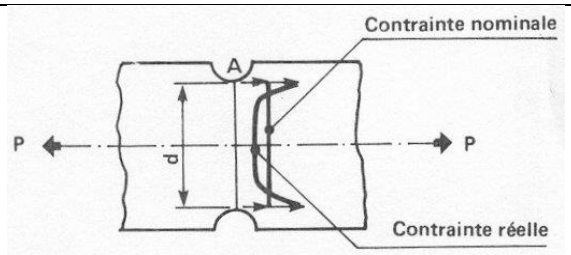
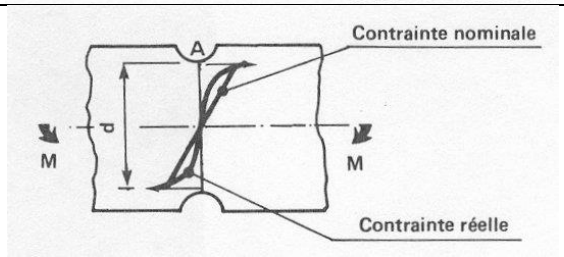
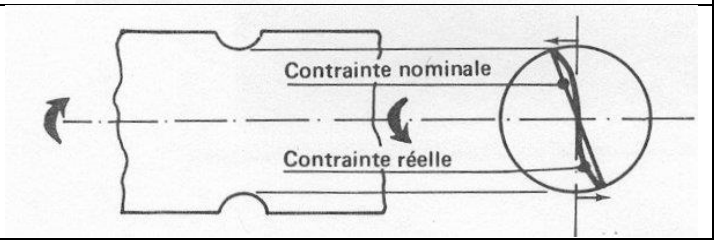
A.VIII.1 Les concentrations de contrainte

A.VIII.1.a Introduction

La théorie de la RDM ne prend en compte que les faibles gradients de variation de section des poutres.

Pourtant, en pratique, les pièces réelles présentent des variations de forme, nommées entailles. Un épaulement sur un arbre, une rainure accueillant un circlips, une gorge, un trou, sont autant de défauts non pris en compte.

Voici l'allure de la répartition des contraintes pour un arbre présentant une rainure circulaire :

TRACTION	
FLEXION	
TORSION	

A.VIII.1.b Facteur de concentration de contrainte

En ces lieux, la variation de section va induire des concentrations de contrainte, c'est-à-dire que la contrainte calculée par la théorie de la RDM, σ_{nom}, devra être multipliée par un facteur supérieur à 1, noté K_t afin d'obtenir la contrainte maximale réelle σ_{max} :

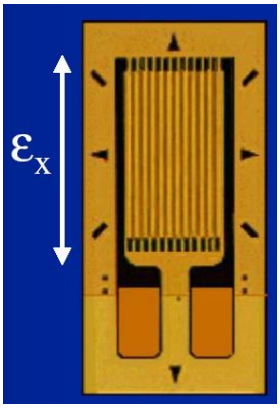
$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

Le facteur de concentration de contrainte ne dépend que de la géométrie de la pièce réelle.

Il est déterminé à l'aide de résolutions par éléments finis, photoélasticimétrie, mesures de déformations à l'aide de jauges pour remonter à la contrainte locale… Ainsi, des abaques seront fournis pour chacun des défauts existants.

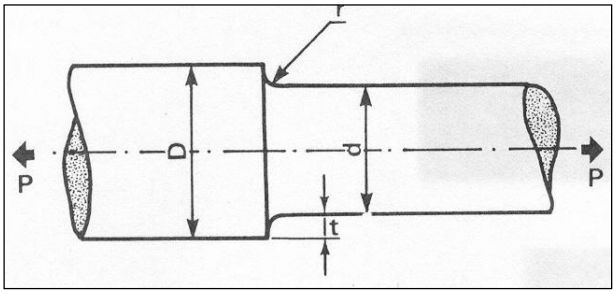


Figure B1 : Etude photoélastique d'une dent d'engrenage



La concentration de contrainte peut induire, localement, un dépassement des limites élastiques et une plastification locale de la matière. Cela ne signifie pas forcément la rupture de la pièce.

A.VIII.1.c Concentration de contrainte pour un arbre épaulé



Le facteur de concentration de contrainte va être exprimé en fonction des rapports :

$$\frac{d}{D} \quad ; \quad \frac{r}{t}$$

A.VIII.1.c.i Cas de la traction

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{S} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

K_t		d/D				
		0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
r/t	0,1	2,3	2,6	2,9	3,1	3,3
	0,2	1,8	2	2,2	2,4	2,6
	0,5	1,4	1,5	1,7	1,8	2
	1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6

$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom}$$

A.VIII.1.c.ii Cas de la flexion

$$\sigma_{nom} = \frac{D}{2} \frac{M_{f_z}}{I_{G_z}} = \frac{32 M_{f_z}}{\pi D^3}$$

Kt		d/D				
		0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
r/t	0,1	1,5	1,6	1,75	2	2,3
	0,2	1,32	1,4	1,5	1,65	1,85
	0,5	1,17	1,2	1,25	1,35	1,5
	1	1,08	1,1	1,15	1,2	1,3

$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom}$$

A.VIII.1.c.iii Cas de la torsion

$$\sigma_{nom} = \frac{D}{2}\frac{M_t}{I_G} = \frac{16M_t}{\pi D^3}$$

Kt		d/D				
		0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
r/t	0,1	1,9	2,1	2,32	2,6	3
	0,2	1,55	1,7	1,9	2,1	2,3
	0,5	1,3	1,35	1,47	1,6	1,8
	1	1,15	1,2	1,3	1,4	1,5

$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom}$$

A.VIII.2 Le flambage ou flambement

Le phénomène de flambement est, à partir d'un seuil de compression, le passage d'un état d'équilibre instable en compression simple à un état d'équilibre stable en flexion composée.



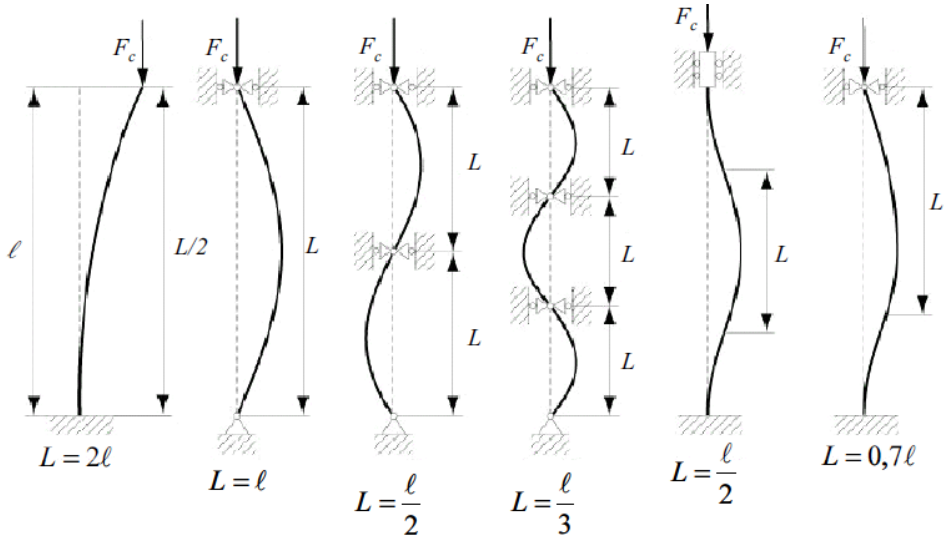
On ne peut étudier cette sollicitation composée en différenciant la flexion et la compression, les déformations devenant grandes.

Le flambage apparaît dès lors que la charge normale dépasse une valeur critique.

Dans le cas d'une poutre de longueur L bi-articulée, on montre que la charge critique vaut :

$$F_c = \frac{\pi^2 E I_{Gz}}{L^2}$$

Pour des poutres de longueur l liées à L comme précisé sur les figures et présentant différentes conditions aux limites, voici la déformée lorsqu'elle sont soumises à la charge critique F_c.


F_c
ℓ
$L/2$
$L = 2\ell$
L
$L = \ell$
$L = \frac{\ell}{2}$
$L = \frac{\ell}{3}$
$L = \frac{\ell}{2}$
$L = 0{,}7\ell$