FORMULAIRE DE DYNAMIQUE ET D'ENERGETIQUE

(A connaître par cœur, c'est le minimum vital requis)

Centre d'inertie – opérateur d'inertie

<table>
<tr><td>Centre d'inertie

$$\int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{GP}dm_{(P)} = \vec{0}$$

$$m_{(\Sigma)}\overrightarrow{OG} = \int_{P\in\Sigma} \overrightarrow{OP}dm_{(P)}$$

$$m_{(\Sigma)}\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_{(\Sigma i)}\overrightarrow{OG_i}$$
</td><td>Opérateur d'inertie (voir fiche opérateurs)

$$[\mathrm{I}(Q,S)]\vec{u} = \begin{pmatrix} A = \int_S y^2 + z^2 dm_{(p)} & -F = -\int_S xy\ dm_{(p)} & -E = -\int_S xz\ dm_{(p)} \\ -F & B = \int_S x^2 + z^2 dm_{(p)} & -D = -\int_S yz\ dm_{(p)} \\ -E & -D & C = \int_S x^2 + y^2 dm_{(p)} \end{pmatrix}_{(Q,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \vec{u}$$

Théorème de Huygens

$$[\mathrm{I}(Q,S)]\vec{u} = [I(G,S)]\vec{u} + \underbrace{m_S\overrightarrow{QG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{QG})}_{[I(Q,G\ m_{(S)})]\vec{u}} \quad avec \quad \overrightarrow{QG} = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix}$$

$$\left[I(Q,G\ m_{(S)})\right] = m_{(S)}\begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}$$
</td></tr>
</table>

Cinétique - dynamique

<table>
<tr><td>Torseur cinétique

$$\{C_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} m_{(S)}\overrightarrow{V_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} \end{Bmatrix}_A$$

Changement de point d'un torseur

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{B,S/R}} + m_{(S)}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{V_{G,S/R}}$$

Cas général

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = m_{(S)}\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A,S/R}} + \left[I_{(A,S)}\right]\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

A fixe par rapport à R

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \left[I_{(A,S)}\right]\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

G centre d'inertie

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = \left[I_{(G,S)}\right]\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\ ()$$
</td><td>Torseur dynamique

$$\{D_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} m_{(S)}\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} \end{Bmatrix}_A$$

Changement de point d'un torseur

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{B,S/R}} + m_{(S)}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}$$

Cas général

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left(\frac{d(\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}})}{dt}\right)_R + m_{(S)}\overrightarrow{V_{A/R}}\wedge\overrightarrow{V_{G,S/R}}$$

A fixe par rapport à R

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left(\frac{d(\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}})}{dt}\right)_R$$ (A fixe / R)

G centre d'inertie

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left(\frac{d(\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}})}{dt}\right)_R$$ (G centre d'inertie)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Principe fondamental de la dynamique

$$\{D_{\Sigma/R}\} = \{T_{ext\to\Sigma}\} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} m_{(S)}\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext\to\Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{A,ext\to\Sigma}} \end{Bmatrix}_A$$

Rg repère galiléen, Σ ensemble de solides
</td></tr>
</table>

Energétique

Energie cinétique

$$2T_{S/R} = \left\{C_{S/R}\right\} * \left\{V_{S/R}\right\}$$

Cas : G centre d'inertie

$$2T_{S/R} = m_{(S)}\left(\overrightarrow{V_{G,S/R}}\right)^2 + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\left(\left[I_{(G,S)}\right]\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)$$

A fixe par rapport à R

$$2T_{S/R} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.\left(\left[I_{(A,S)}\right]\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)$$

Σ ensemble de solides Si

$$T_{\Sigma/R} = \sum_{i=1}^{n} T_{Si/R}$$

Puissance

Puissance des actions mécaniques extérieures

$$P_{ext\to\Sigma/R} = \int_{p\in\Sigma} \overrightarrow{V_{P/R}}.\overrightarrow{df_p}$$

$$P_{ext\to S/R} = \left\{T_{ext\to S}\right\} * \left\{V_{S/R}\right\} = \overrightarrow{\mathrm{R}_{ext\to S}}.\overrightarrow{V_{A,S/R}} + \overrightarrow{M_{A,ext\to S}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Puissance intérieure (ou d'inter efforts)

$$P_{\mathrm{int}} = P_{S_2 \rightleftarrows S_1} = \left\{T_{S_2\to S_1}\right\} * \left\{V_{S_1\to S_2}\right\}$$

Théorème de l'énergie cinétique

$$P_{ext\to\Sigma/Rg} + P_{\mathrm{int}\to\Sigma/Rg} = \frac{d(T_{\Sigma/Rg})}{dt}$$ Rg repère galiléen, Σ ensemble de solides

I. Dynamique autre formalisme

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
I_{G,S} \arrow[rr, "I_{A,S} = I_{G,S} + I_{A,G(m)}"] \arrow[d, "\vec{\sigma}_{G,S/R} = I_{G,S}\left(\vec{\Omega}_{S/R}\right)"'] & & I_{A,S} \arrow[d, "\vec{\sigma}_{A,S/R} = I_{A,S}\left(\vec{\Omega}_{S/R}\right) + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A\in S/R}"] \\
\vec{\sigma}_{G,S/R} \arrow[rr, "\vec{\sigma}_{A,S/R} = \vec{\sigma}_{G,S/R} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{G\in S/R}"] \arrow[d, "\vec{\delta}_{G,S/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{G,S/R}\right]_R"'] & & \vec{\sigma}_{A,S/R} \arrow[d, "\vec{\delta}_{A,S/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A,S/R}\right]_R + m\vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G\in S/R}"] \\
\vec{\delta}_{G,S/R} \arrow[rr, "\vec{\delta}_{A,S/R} = \vec{\delta}_{G,S/R} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{A}_{G\in S/R}"'] & & \vec{\delta}_{A,S/R}
\end{tikzcd}
$$