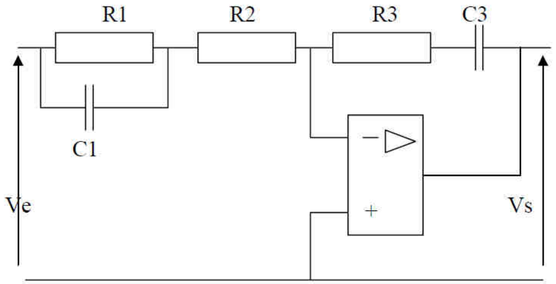
CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS



Les objectifs de ce cours sont de :

- Définir l'intérêt et les limites de la correction des systèmes asservis
- Mettre en évidence l'influence des corrections standards sur les performances
- Etre capable de choisir un correcteur et de régler ses paramètres en fonction du cahier des charges du système étudié

I. Introduction à la correction des systèmes asservis

I.1. Objectifs

Du point de vue de l'automaticien, un système asservi doit satisfaire à différentes exigences (performances) qui peuvent être classées en deux grands groupes :

<table>
<tr><td>Stabilité, amortissement
• obtention et maintien de la stabilité,
• obtention d'un transitoire bien amorti,
• Immunité aux bruits générés par certains composants,
• Sollicitation acceptable des actionneurs</td><td>Précision, rapidité
• précision statique et dynamique,
• rapidité de la réponse dans les transitoires,
• effacement des effets des perturbations,</td></tr>
<tr><td colspan="2">Spécifications fréquentielles :
• bande passante à –3dB ou –6dB pour l'asservissement ;
• facteur de résonance (ou coefficient de surtension) Q_{dB}, dans la pratique on utilise la valeur Q_{dB} = 2.3 dB ;
• la pulsation ou la fréquence de résonance.</td></tr>
</table>

Les spécifications fonctionnelles, opérationnelles et technologiques du cahier des charges imposent aux concepteurs de la chaîne «pré-actionneurs ; actionneurs ; processus ; capteurs» une organisation structurelle et des choix de composants.
Le système résultant de cette conception « classique » ne possède pas forcément de manière naturelle les caractéristiques qui lui permettront de répondre aux exigences de comportement posées en termes de performances.
En considérant la partie opérative « figée », l'objectif est de réaliser une modification du système de commande en rajoutant un ou plusieurs correcteurs afin d'optimiser les performances.

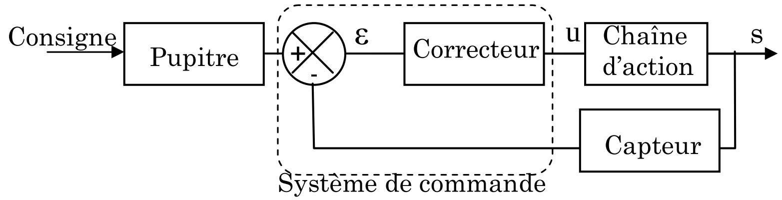
I.2. Position du correcteur

Les correcteurs peuvent se placer dans la boucle d'asservissement soit en cascade (en série) avec les autres fonctions de transfert ou en parallèle avec l'une des fonctions de transfert de la chaîne directe,

mais toujours avant un étage de puissance, afin qu'ils ne consomment et ne modifient pas l'étude globale des puissances du système.
Il est généralement positionné entre le comparateur et la chaîne d'action, pour assurer :

- une correction efficace des perturbations (il est placé avant la perturbation),
- la "fraîcheur" de l'information de sortie du comparateur. Ce signal n'a pas été modifié par les différents constituants du système

Ses caractéristiques sont entièrement contrôlées et réglables (technologie électronique ou informatique).



Le signal u(t) correspond à la loi de commande de la chaîne d'action. Sa valeur est ajustée en permanence par le correcteur afin d'optimiser les performances.

I.3. Histoires de compromis :

Dans les chapitres précédents sur les systèmes asservis, nous avons vu que l'on pouvait satisfaire les conditions de stabilité et de précision en formulant des conditions sur la fonction de transfert en boucle ouverte.
La **stabilité** est définie par :

- **la marge de gain** : la stabilité est d'autant meilleure (le système est mieux amorti) que le gain de la FTBO est plus petit, c'est-à-dire que la bande passante en boucle ouverte est plus faible ;
- **la marge de phase** : la stabilité est d'autant meilleure que le déphasage de la FTBO est plus faible (en valeur absolue) c'est-à-dire le minimum d'intégrateurs possible.

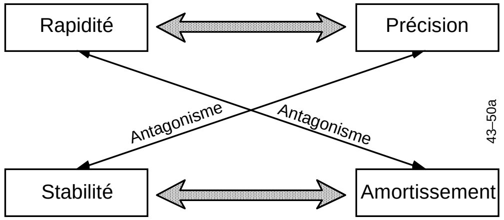
La **précision** est définie par :

- la **précision statique** : souhaiter annuler l'écart statique (écart en régime permanent) nécessite de placer dans la chaîne directe un nombre d'intégrateurs compatible avec le signal d'entrée imposé,
- la **précision dynamique** : elle est d'autant meilleure que le gain de la FTBO est plus élevé, c'est-à-dire que la bande passante est plus large ;

La **rapidité** (propriété temporelle) est en relation avec la bande passante du système (propriété fréquentielle) mais peut être pénalisée par un amortissement trop important
La réjection des perturbations est d'autant meilleure que le gain de la boucle ouverte est grand.
Voilà posé sous forme de dilemme, le problème posé à l'automaticien.

Principe de la correction
Les solutions proposées pour résoudre le dilemme stabilité-précision reposent sur deux remarques fondamentales qui vont permettre de dissocier, du moins en partie, le couple « stabilité-précision » :

- **Remarque n°1 :** La stabilité est définie pour des pulsations (ou fréquences) proches de la pulsation de coupure à 0dB donc relativement élevées, du moins à l'échelle de la partie opérative qui se comporte comme un filtre passe-bas.
- **Remarque n°2 :** La précision statique est définie pour des pulsations basses, donc dans des plages de fonctionnement correspondant à des signaux qui varient lentement.



I.4. Modes d'actions de correction et correcteurs

Pour la suite nous devons dissocier deux choses :

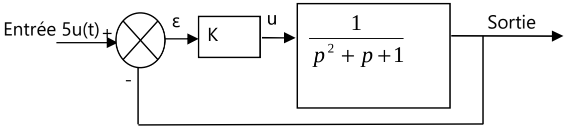
- d'une part les modes d'actions de correction, en effet trois familles de processus théoriques existent afin de modifier les performances, par contre l'ingénieur ne sait pas réaliser des composants (cartes) pour chaque mode d'action.
- D'autre part des correcteurs, objet réel utilisé classiquement pour régler les performances de systèmes.

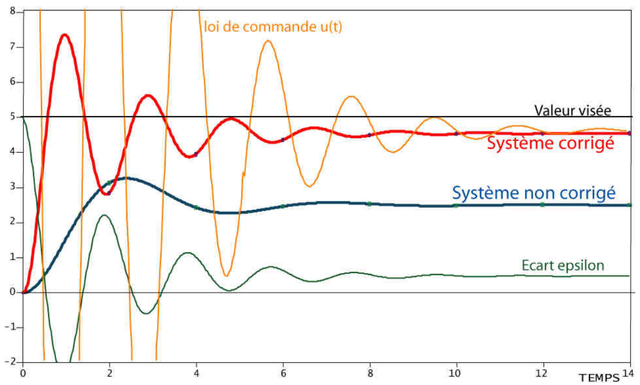
II. Modes d'action de correction

II.1. Action Proportionnelle

L'écart $\varepsilon(t)$ est amplifié afin de constituer le signal de commande $\boxed{u(t) = K\varepsilon(t)}$

Exemple Réponse d'un système asservi avec un correcteur proportionnelle (K=10)

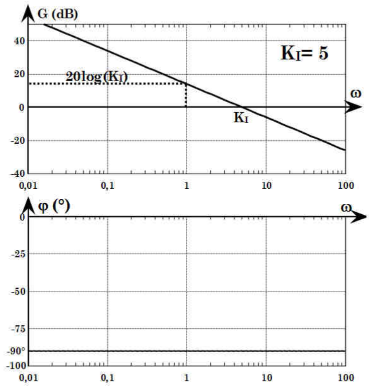




Conclusion :

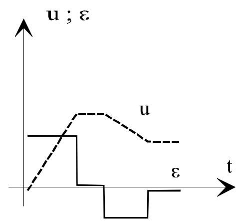
- Si K est grand, la correction est énergique donc rapide mais le risque de dépassement et d'oscillations dans la boucle s'accroît. L'écart résiduel est plus petit (à erreur bornée). Au démarrage, le risque de saturation est important, car si ε est grand, $u = K\varepsilon$ a toutes les chances d'atteindre la valeur maximale admissible.
- Si K est petit, la correction est molle et lente mais il y a moins de risques d'oscillations.

II.2. Action Intégrale



Le signal de commande u(t) est fonction du cumul des écarts $\varepsilon(t)$: $u(t) = K_I \int_0^t \varepsilon(x)dx$ K$_I$ est le gain. Dans Laplace on a : $C(p) = \frac{K_I}{p}$.

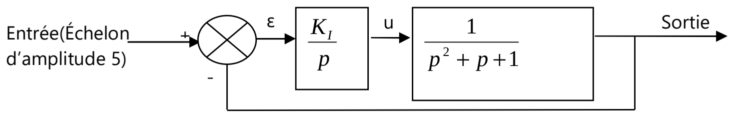
Remarques :

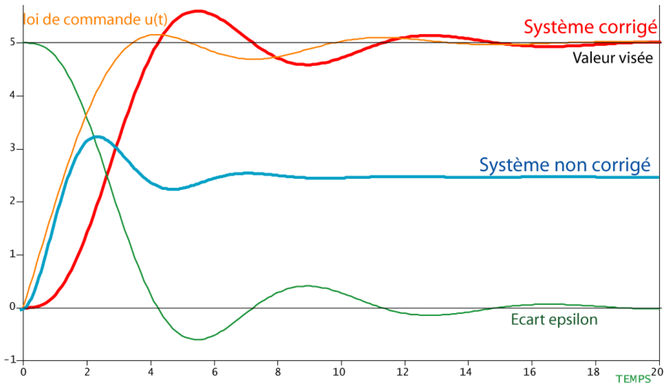


- Le signal $u(t)$ augmente progressivement. Cela induit un démarrage plus doux et une montée moins rapide du signal de sortie (inertie).
- Le signal de commande d'équilibre, nécessaire au processus, est maintenu. La commande intégrale est une commande progressive mais persévérante.
- Tant que subsiste une erreur positive (ou négative) l'action u(t) augmente (ou diminue) jusqu'à ce que l'erreur s'annule.

Ainsi en est-il du conducteur automobile qui enfonce progressivement l'accélérateur jusqu'à ce que sa vitesse atteigne la vitesse voulue; il maintient alors son pied à cette exacte position assurant ainsi le maintien de sa vitesse. Si sa vitesse vient à augmenter (ε < 0), lors d'une descente par exemple, il diminuera progressivement l'arrivée d'essence jusqu'au rattrapage exact de sa consigne.

Exemple : Réponse d'un système asservi avec une action intégrale (K$_I$=0.4)



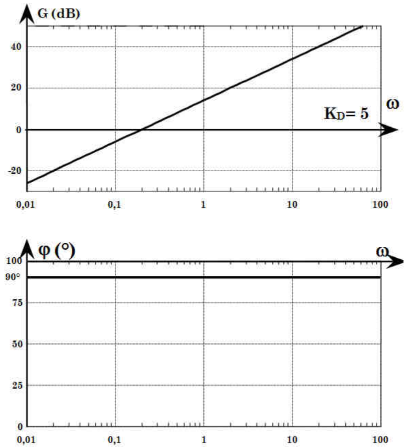


Conclusion :

- amplification très fortement les basses fréquences ;
- diminution de la marge de phase de 90° sur toute la gamme de fréquence.

II.3. Action Dérivée

Le signal de commande u(t) est fonction de la vitesse d'évolution de l'écart $\varepsilon(t)$: $u(t)=K_D\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$ K_D est le gain du correcteur dérivée. Dans Laplace on a: $C(p)=K_D\,.\,p$



Examinons un four dont la température y(t) à un instant donné est inférieure de 10°C à la température de consigne $y_c(t)$, on a alors $\varepsilon(t)=+10°C$. A l'évidence il faut chauffer et donc envoyer une commande u(t) appropriée. Toutefois il y a lieu de prendre des décisions différentes selon que $\varepsilon(t)$ est croissante (la température continue de diminuer) ou au contraire décroissante (la température va en augmentant). Il faut chauffer plus si $\varepsilon(t)$ augmente que dans le cas contraire.

S'il est nécessaire de tenir compte du sens de variation de l'erreur, il est également indispensable d'agir en rapport avec sa vitesse de variation. Une diminution rapide de température appelle une action énergique.

La dérivée $\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$ fournit les informations nécessaires. On peut alors créer le terme de commande $u(t)=K_d\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$ qui viendra s'ajouter ou se retrancher au terme proportionnel selon que $\varepsilon(t)$ va en augmentant $(\varepsilon(t)>0)$ ou en diminuant $(\varepsilon(t)<0)$. La commande appliquée s'écrit alors :$u(t)=K_d\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}+K_p\varepsilon(t)$. Le terme proportionnel contrôle la précision.

Conclusion :
L'action dérivée permet :
- D'augmenter la marge de gain de 90° sur toute la plage de fréquence.
- D'améliorer de façon significative la stabilité et l'amortissement d'un système.
- D'amplifier très fortement les hautes fréquences.

II.4. Action proportionnel, Intégral, dérivateur

Dans la plupart des cas on juxtapose les différents modes d'action. Cela permet, si les paramètres sont biens choisis, d'avoir les avantages des trois modes d'action .L'équation caractéristique peut se mettre sous plusieurs formes. L'une d'entre-elles est :

$$C(p)=K_P+\frac{K_I}{p}+K_D\,.\,p$$

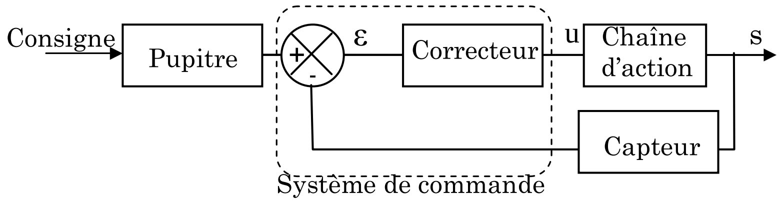
III. Correcteurs

III.1. Introduction

Plusieurs familles de correcteurs sont utilisées, elles agissent sans se « contrarier » dans des bandes de fréquences distinctes :

Correcteurs	Modes actions utilisés
Cas n°1 : Correcteurs assurant en priorité la précision Ces correcteurs améliorent les performances. Les plus couramment utilisés sont :	
• Les correcteurs proportionnels	Proportionnel
• Les correcteurs proportionnels intégrateurs	Proportionnel –Intégrale
• Les correcteurs à retard de phase	Proportionnel –Intégrale
Cas n°2 : Correcteurs assurant en priorité la stabilité Ces correcteurs stabilisant doivent compenser les effets de déphasage produits par les composants déstabilisants comme les intégrateurs par exemple. Les plus couramment utilisés sont :	
• Les correcteurs proportionnels dérivateurs	Proportionnel –Dérivé
• Les correcteurs à avance de phase	Proportionnel –Dérivé
Cas n°2 : Correcteurs assurant les modes d'actions	
• Les correcteurs proportionnels intégrateurs dérivateurs	Proportionnel –Dérivé-Intégral

III.2. Cadre d'utilisation



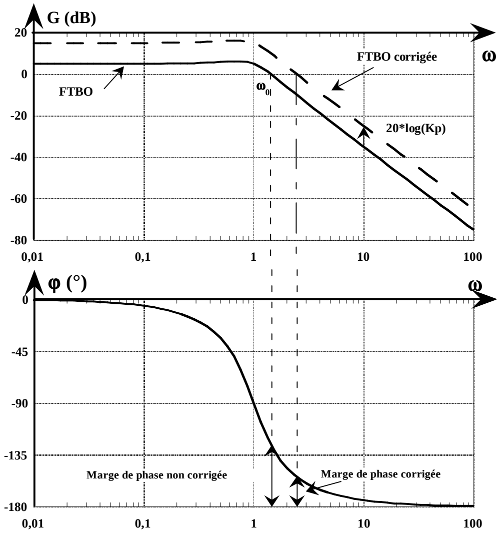
III.3. Correcteur proportionnel

L'équation caractéristique d'un correcteur proportionnel est : $C(p)=K_p$

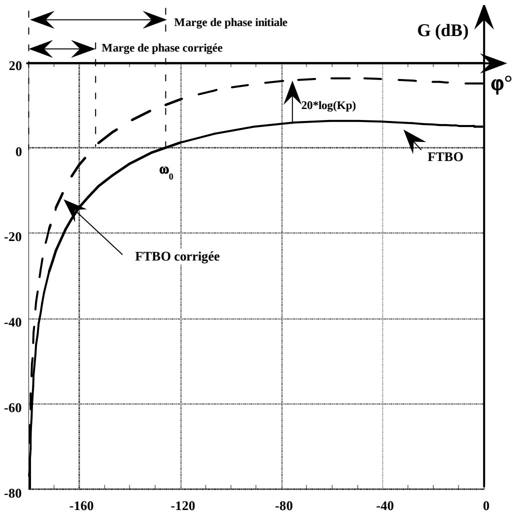
La fonction de transfert en boucle ouverte du système devient donc : $FTBO_{cor}(p)=K_p\,.\,FTBO(p)$

Dans un diagramme de Bode on aura :
- $\|FTBO_{cor}(j\omega)\|_{dB}=20*\log(K_p)+\|FTBO(j\omega)\|_{dB}$
- $Arg(FTBO_{cor}(j\omega))=Arg(FTBO(j\omega))$

Les diagrammes de Bode et de Black de la FTBO corrigés se déduisent des diagrammes de la FTBO non corrigée par une simple translation de $20*\log(K_p)$ selon l'axe des gains. Ceci permet d'ajuster les marges de stabilité du système.
- Si Kp est supérieur à 1, les marges de stabilité sont diminuées.
- Si Kp est inférieur à 1, les marges de stabilité sont augmentées.



Bode



Black

Voir exemple d'application.

Synthèse : correcteur proportionnel
Le tableau ci-dessous résume les différentes caractéristiques d'un correcteur proportionnel :

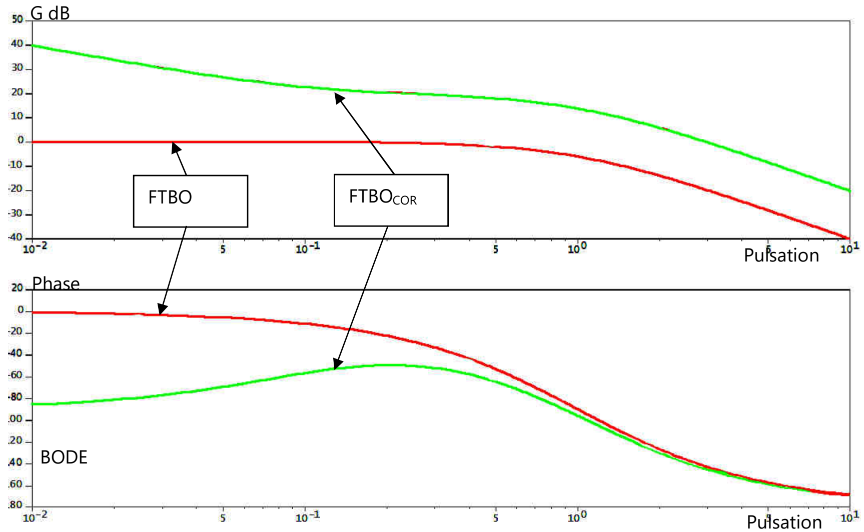
Marges de stabilité	Précision	Rapidité	Dépassement
Diminue si Kp >1	Augmente si Kp >1	Augmente si Kp > 1	Il peut apparaître ou être augmenté si Kp > 1

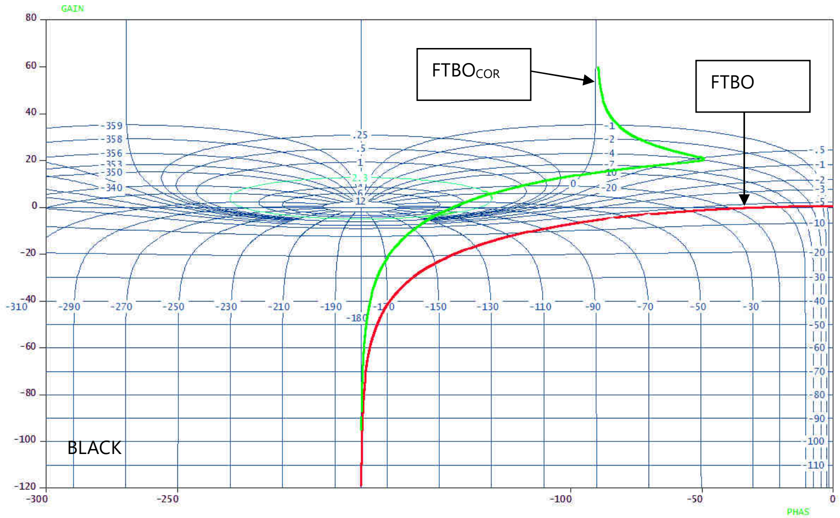
III.4. Correcteur à action intégrale

III.4.1. Correcteur proportionnel intégral (PI)

L'équation caractéristique d'un correcteur proportionnel intégral est : $C(p) = K_P + \frac{K_I}{p}$ L'inconvénient lié au déphasage de -90 ° sur toute la gamme de fréquences est levé puisque, à haute fréquence, ce correcteur ne provoque plus de déphasage. Par contre, le problème lié à l'amplification à basse fréquence est toujours présent.

Diagramme du système corrigé
La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé devient donc :
$$FTBO_{cor}(p) = \left(\frac{K_p p + K_I}{p}\right).FTBO(p)$$





Voir exemple d'application.

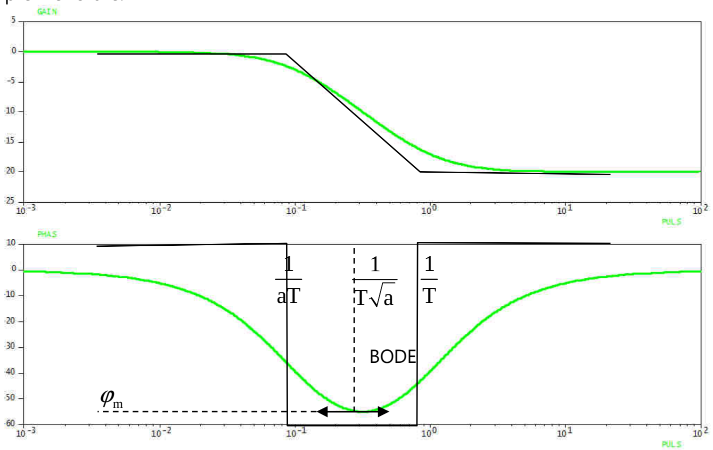
Conclusions pour le correcteur à action proportionnelle et intégrale
Le correcteur à action proportionnelle et intégrale :

- permet d'améliorer la précision statique par augmentation de la classe du système ;
- diminue la stabilité par perte de phase ;
- généralement ralentit le système par diminution de la bande passante.

III.4.2. Correcteur à retard de phase

- **Diagramme de Bode du correcteur**

L'équation caractéristique d'un correcteur à retard de phase est : $C(p)=\dfrac{1+\tau.p}{1+a.\tau.p}$ avec a>1. Le correcteur est un système du premier ordre généralisé. Le numérateur et le dénominateur sont du premier ordre.



Cherchons pour quelle pulsation le maximum du déphasage est atteint et quelle est sa valeur.

$$\mathrm{Arg}(C(j\omega))=\mathrm{Arg}\left(\frac{1+\tau.j.\omega}{1+a.\tau.j.\omega}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{(1+\tau.j.\omega).(1-a.\tau.j.\omega)}{1+(a.\tau.\omega)^2}\right)=\mathrm{Arg}((1+a\tau^2.\omega^2).+.\tau.j.\omega(1-a))$$

$$\mathrm{Arg}(C(j\omega))=\mathrm{Arctg}\left(\frac{\tau.\omega.(1-a)}{1+a.\tau^2.\omega^2}\right)$$

Cette fonction présente un minimum si sa dérivée s'annule, est négative avant et positive après.

$$\frac{d\,\mathrm{Arg}(C(j\omega))}{d\omega}=\frac{\tau.(1-a).(1+a.\tau^2.\omega^2)-2.a.\tau^2.\omega.\tau.\omega.(1-a)}{(1+a.\tau^2.\omega^2)^2}=\frac{\tau.(1-a).(1-a.\tau^2.\omega^2)}{(1+a.\tau^2.\omega^2)^2}$$

La dérivée s'annule pour $\omega_M=\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\tau}$ avec $\varphi_M=-\arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$, elle est négative avant cette pulsation et positive après. On a bien un minimum de phase dont la valeur est : $\mathrm{Arg}\left(C(j\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\tau})\right)=\mathrm{Arctg}\left(\frac{1-a}{2.\sqrt{a}}\right)$

- **Réglage du correcteur à retard de phase** $FTBO_{cor}(p)=\left(\frac{1+\tau.p}{1+a.\tau.p}\right).FTBO(p)$

Voir exemple d'application.

Synthèse : correction intégrale

Le tableau ci-dessous résume les différentes caractéristiques d'un correcteur à action intégral « bien choisi, bien réglé » :

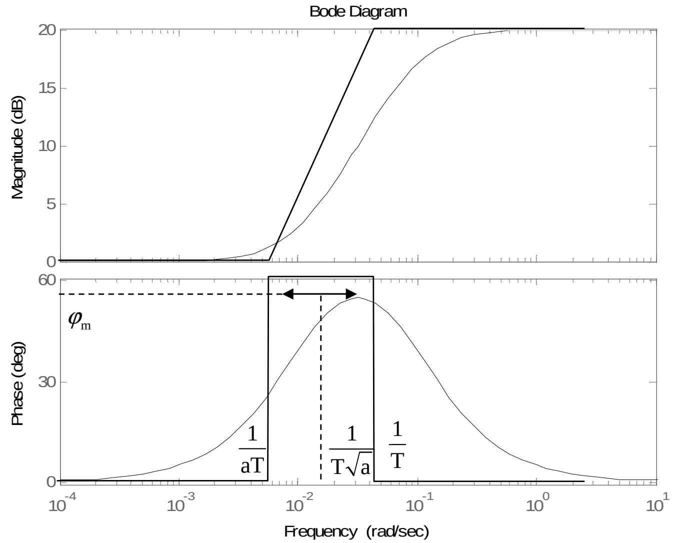
Marge de stabilité	Précision	Rapidité	Dépassement
Les marges ne sont pas modifiées, voire augmentent avec un correcteur à retard de phase.	Augmente	Peu d'influence	Peu d'influence

III.5. Correcteur à action dérivée

III.5.1. Correcteur à avance de phase

Diagramme de Bode du correcteur

L'équation caractéristique d'un correcteur à avance de phase est : $C(p)=\dfrac{1+a.\tau.p}{1+\tau.p}$ avec a >1.



Le correcteur est un système du premier ordre généralisé. Le numérateur et le dénominateur sont du premier ordre.

Cherchons pour quelle pulsation le maximum du déphasage est atteint et quelle est sa valeur.

$$\mathrm{Arg}(C(j\omega))=\mathrm{Arg}\left(\frac{1+a.\tau.j.\omega}{1+\tau.j.\omega}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{(1+a.\tau.j.\omega).(1-\tau.j.\omega)}{1+(\tau.\omega)^2}\right)==\mathrm{Arg}((1+a\tau^2.\omega^2).+.\tau.j.\omega(a-1))$$

$$\mathrm{Arg}(C(j\omega))=\mathrm{Arctg}\left(\frac{\tau.\omega.(a-1)}{1+a.\tau^2.\omega^2}\right)$$

Cette fonction présente un maximum si sa dérivée s'annule, est positive avant et négative après.

$$\frac{d\,(\mathrm{Arg}(C(j\omega)))}{d\omega}=0 \iff 0=\frac{\tau.(a-1).(1+a.\tau^2.\omega^2)-2.a.\tau^2.\omega.\tau.\omega.(a-1)}{(1+a.\tau^2.\omega^2)^2}=\frac{\tau.(a-1).(1-a.\tau^2.\omega^2)}{(1+a.\tau^2.\omega^2)^2}$$

La dérivée s'annule pour $\omega=\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\tau}$, elle est positive avant cette pulsation et négative après. On a bien un maximum de phase dont la valeur est : $\mathrm{Arg}\left(C(j\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\tau})\right)=\mathrm{Arctg}\left(\frac{a-1}{2.\sqrt{a}}\right)$.

- **Réglage du correcteur à avance de phase**

Système corrigé : $FTBO_{cor}(p)=\left(\frac{1+a.\tau.p}{1+\tau.p}\right).FTBO(p)$

Le correcteur à avance de phase est plus complexe à régler de par la dépendance de chaque paramètre vis-à-vis de chaque marge.
On vient positionner l'avance de phase maxi au niveau de la pulsation de coupure du système non corrigé, ce qui permet en théorie d'augmenter sensiblement la marge de phase. Mais dans le même temps la marge de gain diminue de 20 log a.

Voir exemple d'application.

- **Synthèse : correction dérivée**

Le tableau ci-dessous résume les différentes caractéristiques d'un correcteur à action dérivée « bien choisi, bien réglé » :

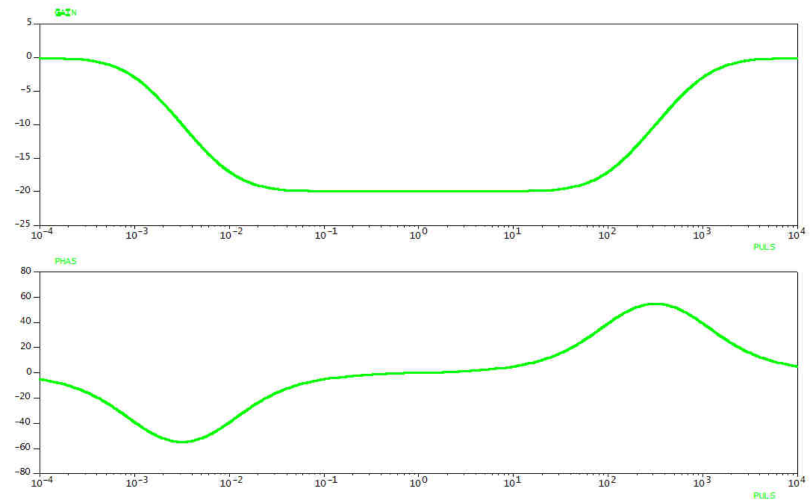
Marge de stabilité	Précision	Rapidité	Dépassement
Les marges augmentent	Peu d'influence	Un peu amélioré car la bande passante augmente légèrement	Peu d'influence

III.6. Correcteur proportionnel, Intégral, dérivateur (PID)

On utilise souvent un correcteur proportionnel à avance et retard de phase dont l'équation caractéristique est la suivante :

$$C(p) = \underbrace{K_p}_{\text{comportement proportionnel}} \cdot \underbrace{\frac{1+a_a.\tau_a.p}{1+\tau_a.p}}_{\text{comportement avance de phase aux hautes fréquences}} \cdot \underbrace{\frac{1+\tau_r.p}{1+a_r.\tau_r.p}}_{\text{comportement retard de phase aux basses fréquences}}$$

Diagramme de Bode du correcteur proportionnel à avance et retard de phase :



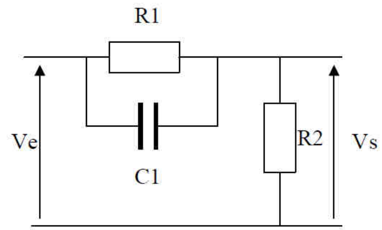
Voir exemple d'application.

Ce correcteur est difficilement réglable, mais il permet de conjuguer les avantages des 3 modes vus précédemment.

- Intégral : augmentation de la précision
- Proportionnel : amélioration de la précision et de la rapidité pour des gains >1
- Dérivé : Amélioration des marges de stabilité

ANNEXES POUR LES PHYSICIENS

Réseau correcteur à avance de phase



$$C(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = \frac{R2(R1.C1.p+1))}{R2(R1.C1.p+1)+1}$$

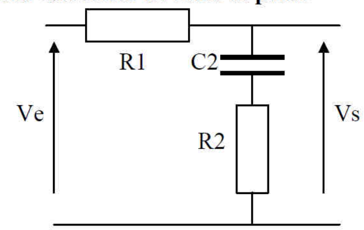
$$= \frac{R2}{R1+R2} \cdot \frac{1+R1.C1.p}{1+\frac{R1.R2.C1.p}{R1+R2}}$$

$$= K\left(\frac{1+\tau.p}{1+a.\tau.p}\right)$$

$$K = a = \frac{R2}{R1+R2}$$

$$\tau = R1.C1$$

Réseau correcteur à retard de phase



$$C(p) = \frac{Vs(p)}{Ve(p)} = \frac{1+\frac{1}{C2.p}}{R1+R2+\frac{1}{C2.p}} = \frac{R2.C2.p+1}{(R1+R2)C2.p+1}$$

$$= \frac{1+R2.C2.p}{1+\frac{R1+R2}{R2}R2.C2.p} = K\left(\frac{1+\tau.p}{1+b.\tau.p}\right)$$

$$K = 1 \qquad b = \frac{R1+R2}{R2} > 1 \qquad \tau = R2.C2$$

Réseau PID

4.3.1. série