



I- Opérateur d'inertie

I.1- Cas général

L'opérateur d'inertie est un objet mathématique modélisant la répartition des masses d'un solide autour d'un point dans les trois directions de l'espace.

Il peut s'écrire de différentes manières suivant le point où on l'exprime et le repère dans lequel on l'exprime. Dans tout les cas il s'écrit sous la forme d'une matrice symétrique.

Si on pose dans le repère R_S lié au solide S les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GP}$:

Alors :



où :

A, B et C sont respectivement les moments d'inertie de S par rapport aux axes $(G, \overrightarrow{X})$, $(G, \overrightarrow{Y})$, $(G, \overrightarrow{Z})$:

.....

Et D, E et F sont les produits d'inertie ou balourds perpendiculaires :

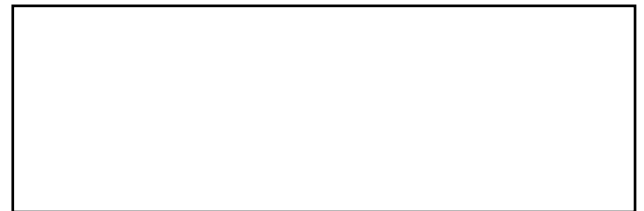
.....

I.2- Cas particuliers

I.2.1- Un plan de symétrie

Si le solide accepte un plan de symétrie, alors dans un repère dont deux les axes sont inclus dans ce plan de symétrie, la matrice a deux produits d'inertie nuls.

Exemple : Pour une symétrie de plan $(G, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ alors :



I.2.2- Deux plans de symétrie

Si le solide accepte deux plans de symétrie, alors dans un repère dont deux les axes sont inclus dans ces plans de symétrie, la matrice a tous ses produits d'inertie nuls.

Exemple : Pour 2 symétries de plans $(G, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ et $(G, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ alors :



I.2.3- Solide de révolution

Si le solide est de révolution d'axe confondu avec celui du repère. Alors la matrice a tous ses produits d'inertie nuls et deux moments d'inertie identiques :

Exemple : Si on a solide de révolution d'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ alors :





I.2.4- Epaisseur très faible : Tôle

Si le solide est plan et a une épaisseur très faible (C'est par exemple une tôle plane), alors dans un repère dont deux les axes sont inclus dans ce plan, la matrice a deux produits d'inertie nuls et un moment d'inertie est égal à la somme des deux autres

Exemple : Pour 1 solide mince dans le plan $(G, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ alors :

I.2.5- Cylindre

Si le solide est un cylindre homogène de masse M de rayon R et de Hauteur H. La matrice d'inertie dans le repère R_S dont l'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ est celui du cylindre est de la forme :

I.2.6- Parallélépipède

Si le solide est un parallélépipède homogène de masse M de largeur a (Sur $\overrightarrow{X}$) de longueur b (Sur $\overrightarrow{Y}$) et de hauteur h (Sur $\overrightarrow{Z}$). La matrice d'inertie dans le repère R_S dont l'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ est orienté suivant la hauteur et dont l'axe $(G, \overrightarrow{Y})$ est orienté suivant la longueur est de la forme :

I.2.7- Barre

Si le solide est une barre de masse M de dimensions très petites devant la longueur L alors la matrice d'inertie dans le repère R_S dont l'axe $(G, \overrightarrow{Z})$ est orienté suivant la longueur est de la forme :

I.2.8- Sphère

Si le solide est une sphère homogène de masse M alors la matrice d'inertie dans tout repère R_S est :

I.2.9- Cube

Si le solide est un cube homogène de masse M alors la matrice d'inertie dans tout repère R_S est :



I.3- Théorème de Huygens

I.3.1- Définition

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G.

Soit deux axes parallèles de vecteur directeur $\vec{Z}$ (tel que $\vec{Z}$ est un vecteur unitaire : $\|\vec{Z}\| = 1$) et passant par les points O et G.

Soit un point M quelconque de ce solide S.

On pose les distances :

- ☞ d : Entre les axes (O, $\vec{Z}$) et (G, $\vec{Z}$)
- ☞ r_G : Entre le point M et l'axe (G, $\vec{Z}$)
- ☞ r_O : Entre le point M et l'axe (O, $\vec{Z}$)

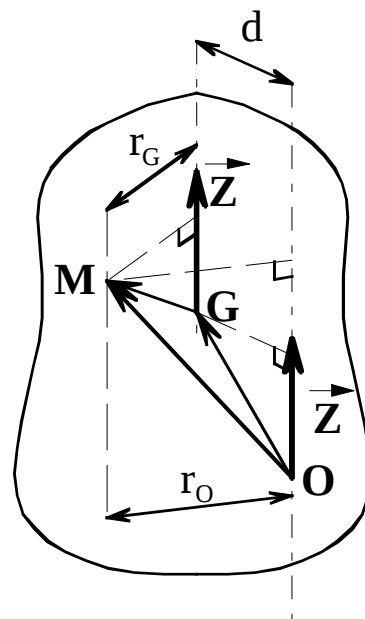
Sachant que $\|\vec{Z}\| = 1$ et que par définition du produit vectoriel :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

On en déduit :

.....

.....



Par définition du moment d'inertie par rapport à l'axe (O, $\vec{Z}$) on a :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Or par définition du centre de gravité : $\int_S \vec{GM}.dm = \vec{0}$ et de la masse : $m = \int_S dm$

Donc :

Conclusion :

Soit un solide S de masse m et de centre de gravité G. Soit deux axes parallèles : Δ quelconque et Δ_G passant par G distant d'une distance d l'un de l'autre. Alors si on pose I_Δ et I_{Δ_G} les moments d'inertie par rapport aux axes Δ et Δ_G on a :

Remarque : Ce théorème de Huygens ne fonctionne que si G est le centre de gravité du solide S.



I.3.2- Théorème de Huygens généralisé

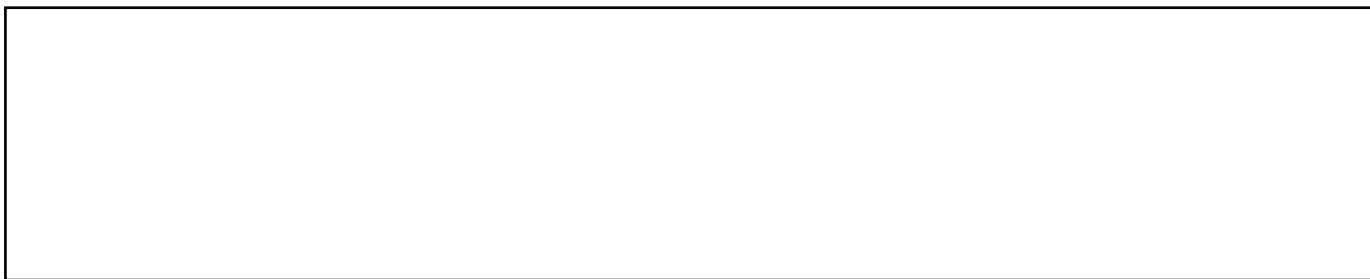
Soit : ☞ Un solide S de masse M et de centre d'inertie G

☞ $\overline{J_G(S)}$ L'opérateur d'inertie du solide S en G

☞ $\overline{J_A(S)}$ L'opérateur d'inertie du solide S en A

Alors quelque soit le point A et le vecteur $\overline{U}$ on a :

Si on pose : $\overline{J_G(S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_S}$ $\overline{J_A(S)} = \begin{pmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{pmatrix}_{R_S}$ et : $\overline{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_S}$ On a alors :



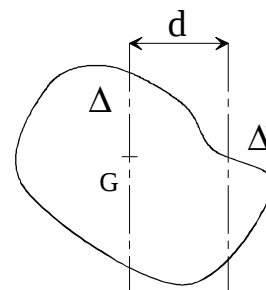
I.3.3- Remarque

Le théorème de Huygens ne s'applique que entre un point A quelconque et le centre d'inertie. Mais pas entre deux points quelconques :

I.3.4- Cas du moment d'inertie

Soit un solide S :
- de masse m
- de centre d'inertie G appartenant à l'axe Δ
- De moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ

Soit un axe Δ' parallèle à l'axe Δ et distant de celui-ci d'une distance d. Alors $J_{\Delta'}$ le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ' peut se calculer par :



.....



I.4 - Application : Moments d'inertie de solides homogènes

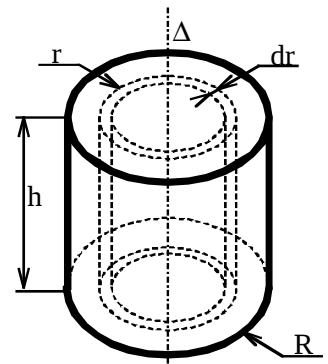
I.4.1- Cylindre plein

Soit un cylindre homogène : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon R
☞ De hauteur h ☞ De masse volumique ρ

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon r
☞ De hauteur h ☞ D'épaisseur dr

Tous les volumes élémentaires dv de masse $dm = \rho \cdot dv$ sont constitués de points tous équidistants de l'axe Δ . Cette distance étant r , on en déduit pour ce cylindre

le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :



Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire :

.....

.....

Sachant que la masse m d'un cylindre homogène de rayon R de hauteur h et de masse volumique ρ est :

..... On en déduit le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

I.4.2- Cylindre creux

Soit un cylindre creux homogène : ☞ D'axe Δ ☞ De rayon extérieur R_{ext}
☞ De rayon intérieur R_{int} ☞ De hauteur h ☞ De masse volumique ρ

Ce volume est la soustraction d'un cylindre plein de rayon R_{int} à un cylindre plein de rayon R_{ext} . Etant donné l'expression établie précédemment concernant le moment d'inertie d'un cylindre plein, on a pour ce cylindre creux homogène

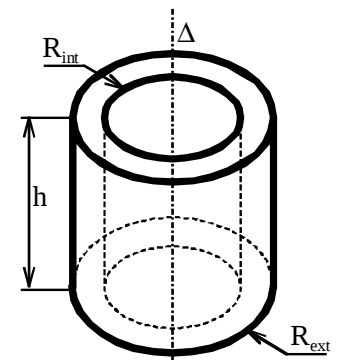
un moment d'inertie :

.....

.....

Sachant que la masse m d'un cylindre creux homogène de rayon extérieur R_{ext} de rayon intérieur R_{int} de hauteur h et de masse volumique ρ est :

D'où le moment d'inertie :





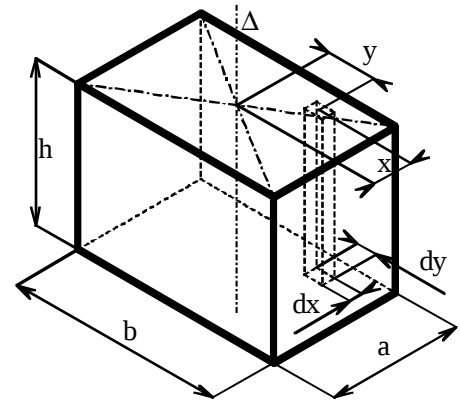
I.4.3- Parallélépipède rectangle

Soit un parallélépipède rectangle homogène :

- ☞ D'axe Δ passant par les milieux de deux faces opposées
- ☞ De hauteur h (parallèlement à l'axe Δ)
- ☞ De largeur a et de longueur b
- ☞ De masse volumique ρ

On décompose ce parallélépipède en volumes élémentaires. Ces volumes élémentaires sont des parallélépipède rectangle:

- ☞ De hauteur h (parallèlement à l'axe Δ)
- ☞ De largeur dx et de longueur dy



Tous les volumes élémentaires dv de masse $dm = \rho \cdot dv$ sont constitués de points équidistants de l'axe Δ . Cette distance étant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, D'où pour ce parallélépipède le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

.....

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Sachant que la masse m d'un parallélépipède rectangle homogène de dimensions $a \times b \times h$ est :

.....

On en déduit le moment d'inertie :



I.4.4- Sphère pleine

Soit une sphère homogène : ☞ De rayon R

☞ De masse volumique ρ

On décompose ce cylindre en volumes élémentaires.

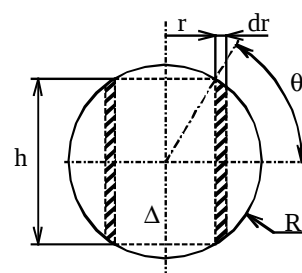
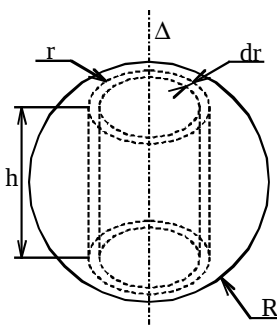
Ces volumes élémentaires sont des cylindres creux :

☞ D'axe Δ

☞ De rayon r

☞ De hauteur h

☞ D'épaisseur dr



Tous les volumes élémentaires dv de masse $dm = \rho \cdot dv$ sont constitués de points équidistants de l'axe Δ . Cette distance étant r , on en déduit pour ce cylindre le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

.....

Etant donné les caractéristiques du volume élémentaire :

On pose θ l'angle défini par un plan perpendiculaire à l'axe Δ et la droite passant par l'arrêt intérieure de ce cylindre creux. Ce plan et cette droite passant tout deux par le centre de la sphère.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Sachant que la masse m d'une Sphère homogène de rayon R et de masse volumique ρ est :

.....

On en déduit le moment d'inertie par rapport à tout axe Δ passant par le centre de la sphère :

.....



I.4.5- Plaque rectangulaire de faible épaisseur

Soit une plaque parallélépipédique homogène :

- ☞ D'axe Δ passant au milieu de la plaque et parallèle à celle-ci
- ☞ De hauteur h (parallèlement à l'axe Δ)
- ☞ De largeur a et d'épaisseur e
- ☞ De masse volumique ρ

Cette plaque est un parallélépipède rectangle homogène de masse volumique ρ dont la masse est donc :

$$M = \rho \cdot a \cdot h \cdot e$$

Et le moment d'inertie par rapport à cet axe Δ

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (a^2 + e^2)}{12}$$

Or l'épaisseur e de cette plaque étant négligeable devant sa largeur a on a : e^2 négligeable devant a^2

Donc cette plaque homogène de hauteur h , largeur a , épaisseur e , masse volumique ρ a une masse de :

.....

Et un moment d'inertie par rapport à l'axe Δ parallèle à la hauteur et passant par le milieu de la plaque :

.....

Remarque : On montre que cette expression reste valable pour toute plaque rectangulaire. Même si l'épaisseur n'est pas constante. A la condition que celle-ci reste petite devant les autres dimensions.

I.4.6- Barre de faible section

Soit une plaque parallélépipédique homogène :

- ☞ D'axe Δ passant orthogonalement au milieu de la barre.
- ☞ De Longueur ℓ (orthogonalement à l'axe Δ)
- ☞ De largeur a et d'épaisseur b
- ☞ De masse volumique ρ

Cette barre est un parallélépipède rectangle homogène de masse volumique ρ dont la masse est donc :

$$m = \rho \cdot \ell \cdot a \cdot b$$

Et le moment d'inertie par rapport à cet axe Δ

$$I_{\Delta} = \frac{m \cdot (\ell^2 + b^2)}{12}$$

Or l'épaisseur b de cette plaque étant négligeable devant sa longueur ℓ on a : b^2 négligeable devant ℓ^2

Donc cette plaque homogène de hauteur h , largeur a , épaisseur e , masse volumique ρ a une masse de :

.....

Et un moment d'inertie par rapport à l'axe Δ parallèle à la hauteur et passant par le milieu de la plaque :

.....

Remarque : On montre que cette expression reste valable pour toute barre. Même si la section n'est pas rectangulaire. A la condition que les dimensions de cette section restent faibles devant la longueur.

