

TD09 : électromagnétisme, ARQS

Calculs d'inductance

EM071. Inductance propre d'une bobine torique (*)

Une bobine torique, centrée autour d'un axe Oz , est constituée de N spires jointives enroulées sur un tore de section rectangulaire, de rayon intérieur a , de rayon extérieur b et de hauteur h . Les spires sont parcourues par un courant d'intensité I .

Dans l'hypothèse de spires jointives ($N \gg 1$), on rappelle que le champ magnétique vaut $\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ au sein de la bobine et qu'il est nul en dehors $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$.

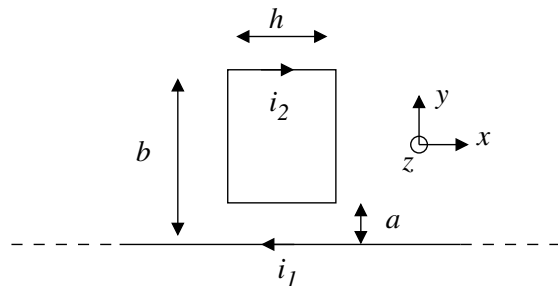
1. En considérant le flux propre, déterminer l'inductance propre de la bobine torique.
2. En considérant l'énergie magnétique, déterminer l'inductance propre de la bobine torique.

Réponse : $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

EM057. Inductance mutuelle (*)

On considère le dispositif ci-dessous, comportant un fil infini et une spire rectangulaire.

Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle entre le fil infini et la spire rectangulaire.



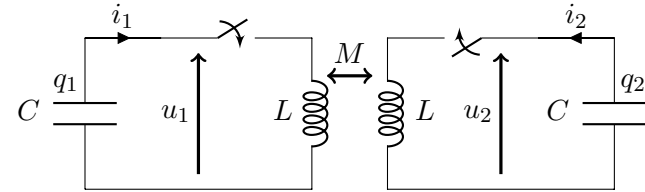
Réponse : $M = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Couplage électromécanique

EM106. Couplage d'oscillateurs par mutuelle inductance (***)

On s'intéresse aux deux circuits LC ci-dessous. On note M le coefficient de mutuelle inductance. On étudiera le régime libre.

À $t = 0$, on ferme les deux interrupteurs.



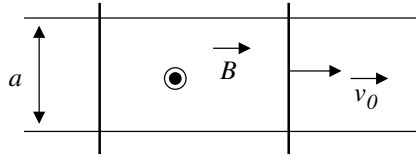
1. Trouver les équations différentielles satisfaites par $q_1(t)$ et $q_2(t)$. On posera $\omega_0^2 = 1/LC$ et $\alpha = M/L$.
2. En considérant les variables $Q = q_1 + q_2$ et $P = q_1 - q_2$, déterminer les formes générales solutions pour P et Q , sans chercher à ce stade à déterminer les constantes d'intégration.
3. Quelle est en général l'allure du spectre de $q_1(t)$?
4. Initialement, les deux circuits sont ouverts. Quelles conditions initiales sur les charges des condensateurs doit-on imposer pour que le spectre de $q_1(t)$ ne contienne qu'une seule fréquence ?
5. On suppose maintenant que $q_1(0) = q$ et $q_2(0) = 0$ et on se place dans la situation où $\alpha \ll 1$. Montrer que :

$$q_1(t) = q \cos(\omega_0 t) \cos(\alpha \omega_0 t / 2)$$
Tracer l'allure de la courbe pour $\alpha = 1/10$.
6. Dans le cas général, réaliser un bilan de puissance et le commenter.

Réponses : 1 : $\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \alpha \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = 0$ et $\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \alpha \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_2 = 0$; 2 : $Q(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$ et $P(t) = B \cos(\omega_2 t + \beta)$ avec $\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \alpha}$ et $\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \alpha}$; 4 : $q_1(0^+) = q_2(0^+) = q$ ou $q_1(0^+) = -q_2(0^+) = q$; 6 : $\frac{d}{dt} \left(\frac{q_1^2}{2C} + \frac{1}{2} L i_1^2 + \frac{q_2^2}{2C} + \frac{1}{2} L i_2^2 + M i_1 i_2 \right) = 0$

EM111. Mouvement de deux barres couplées par induction (**)

Les deux barres sont identiques. Elles sont posées sur deux rails conducteurs parallèles distants de a , horizontaux, de résistance électrique négligeable. Les barres peuvent glisser sans frotter en restant orthogonales aux rails. Chaque barre a une masse m et une résistance électrique $R/2$.



La barre de droite est lancée avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , celle de gauche étant initialement immobile.

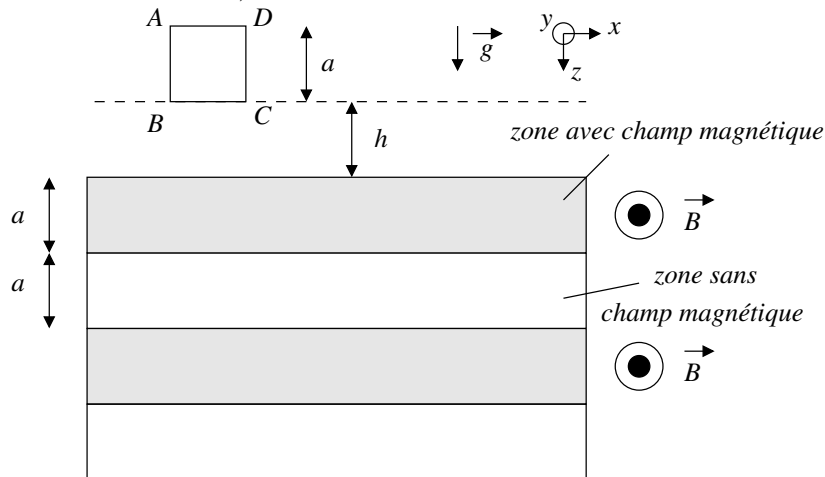
Un champ magnétique uniforme, stationnaire et vertical \vec{B} règne entre les rails.

1. Déterminer le mouvement des barres grâce à un raisonnement qualitatif.
2. Établir l'expression des vitesses des barres en fonction du temps. Commenter le cas $t \rightarrow +\infty$.
3. Faire une étude énergétique.

Réponses : 2 : $\forall t \geq 0, v_2(t) = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-t/\tau})$; $\forall t \geq 0, v_1(t) = \frac{v_0}{2} (1 - e^{-t/\tau})$

EM130. Millefeuille magnétique, Oral Centrale PC 2016 (**)

Un cadre conducteur carré et vertical $ABCD$ de côté a , de masse m et de résistance R tombe dans le champ de pesanteur. Il rencontre une succession de quatre zones horizontales d'épaisseur a dans lesquelles règne un champ magnétique \vec{B} horizontal, uniforme et constant. Chaque zone est séparée de ses voisines par des zones sans champ magnétique, également d'épaisseur a . L'ensemble forme ainsi une sorte de « millefeuille magnétique » (seules les deux premières couches sont représentées sur la figure).



1. De quelle hauteur h faut-il lâcher le cadre $ABCD$, sans vitesse initiale, pour qu'il traverse le mille-feuille à vitesse constante ?

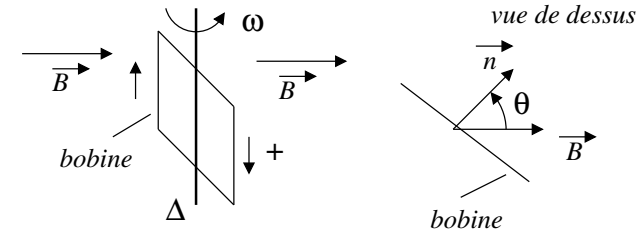
2. Tracer alors l'allure de la vitesse du cadre et du courant électrique le traversant en fonction du temps.

Réponses : 1 : $h = \frac{m^2 g R^2}{2 B^4 a^4}$

EM075. Alternateur rudimentaire (**)

Un alternateur transforme une énergie mécanique (ici la rotation de la bobine) en une énergie électrique (générée par la force électromotrice).

Une bobine plate comportant $N = 200$ spires, d'aire $S = 20 \text{ cm}^2$, tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ entre les pôles d'un aimant qui produit un champ uniforme $B = 0,2 \text{ T}$ normal à l'axe de rotation.



La bobine qui constitue un circuit fermé possède une résistance totale $R = 1 \Omega$. Le champ magnétique qu'elle crée est négligeable devant le champ magnétique de l'aimant.

1. Exprimer la f.e.m induite par le mouvement de la bobine.
2. Déterminer le moment Γ_{op} par rapport à l'axe que l'opérateur doit exercer pour entretenir la rotation :
 - (a) Première méthode : en déterminant la puissance du couple des forces de Laplace grâce à la relation $P_{Lap} + P_{fem} = 0$.
 - (b) Seconde méthode : en utilisant le fait qu'un champ magnétique exerce sur un moment magnétique \vec{M} un couple $\vec{\Gamma}_{Lap} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Réponses : 1 : $e = BSN\omega \sin(\omega t)$; 2 : $\vec{\Gamma}_{op} = \frac{B^2 S^2 N^2 \omega \sin^2(\omega t)}{R} \vec{u}_z$

Pour aller plus loin

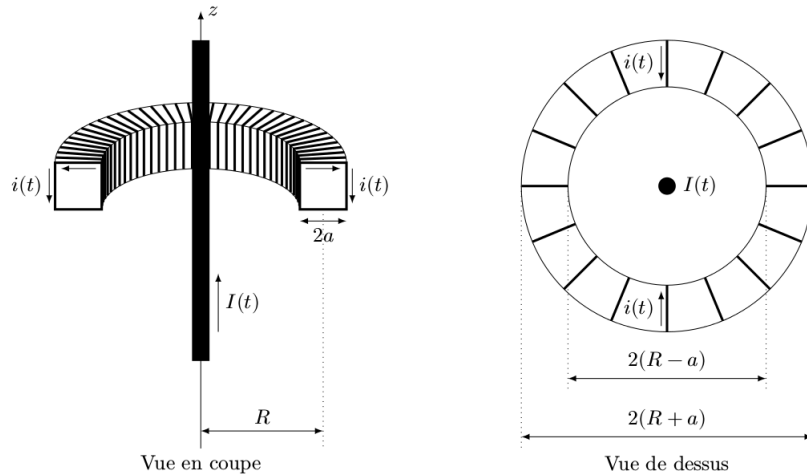
EM131. Pince ampèremétrique (Oral Centrale TSI, **)

Une bobine torique de section carrée de côté $2a$, de rayon moyen R , comportant N spires jointives est fermée sur un ampèremètre de résistance négligeable.

La bobine torique a une résistance équivalente notée R_b .

La bobine entoure un fil conducteur que l'on supposera rectiligne et infini et dont l'axe coïncide avec celui de la bobine torique ; le conducteur est parcouru par un

courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Ce courant variable induit un courant $i(t)$ dans la bobine torique. Vu la symétrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe Oz .



1. Exprimer, en exploitant soigneusement les symétries, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{bobine}}(r, \theta, z, t)$ créé par la bobine en tout point intérieur, en fonction, notamment, de N , $i(t)$, et r .
2. Déterminer, de même, le champ magnétique $\vec{B}_{\text{fil}}(r, \theta, z, t)$ créé par le fil en tout point, en fonction, notamment de $I(t)$.
3. Montrer que l'inductance propre de la bobine torique, notée L et l'inductance mutuelle M entre les deux circuits sont données par :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right) \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R-a} \right)$$

4. Exprimer l'intensité complexe $\underline{i}(t)$ du courant dans la bobine en régime sinusoïdal forcé (régime imposé par le fil central, toujours parcouru par $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$).

5. Que devient le rapport $\left| \frac{\underline{i}}{\underline{I}} \right|$ à haute fréquence ? Préciser le sens de l'expression « haute fréquence ».

On donne $N = 10000$; $R = 6,0 \text{ cm}$; $a = 1,0 \text{ cm}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $R_b = 0,20 \Omega$.

6. Pourquoi ce dispositif, appelée pince ampèremétrique, est très utilisé pour la mesure des courants forts.

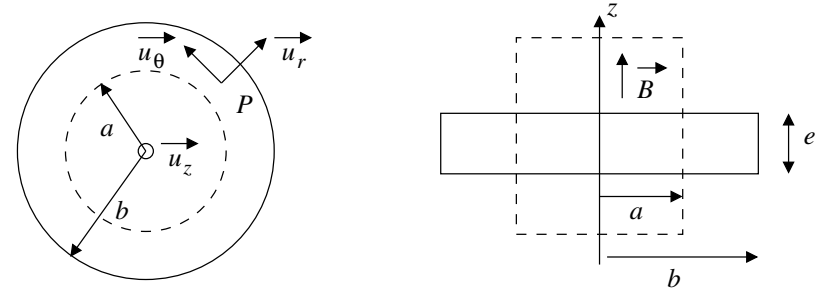
Réponses : 1 : $\vec{B}_{\text{bobine}}(M, t) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$; 2 : $\vec{B}_{\text{fil}}(r, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$; 4 : $\frac{\underline{i}}{\underline{I}} = \frac{-j\omega M}{R_b + jL\omega}$;

5 : $\left| \frac{\underline{i}}{\underline{I}} \right| = \frac{1}{N}$

EM083. Chauffage par induction (Extrait CCP TSI 2013, **)

Un disque conducteur de conductivité σ , d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique \vec{B} . Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé verticalement suivant le vecteur \vec{u}_z ;
- il varie au cours du temps selon la forme $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t) \vec{u}_z$, où B_m représente son amplitude et ω sa pulsation.



Nous admettons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le disque conducteur étant disposé dans un champ magnétique variable, il sera le siège d'un courant volumique induit \vec{j} ;
- compte-tenu de la symétrie du système, le courant volumique induit est orthoradial et de la forme $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_\theta$;
- dans les conditions du problème, le champ magnétique induit créé par le courant induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1. Rappeler la relation entre le vecteur densité volumique de courant \vec{j} au champ électrique \vec{E} dans un conducteur de conductivité σ .
2. On considère un contour circulaire Γ de rayon r et d'axe Oz . Déterminer la circulation $C(r, t)$ du champ électrique résultant sur ce contour. On exprimera $C(r, t)$ en fonction de r , $j(r, t)$ et σ .
3. Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique à travers la surface définie par le contour Γ .

On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

4. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

5. En déduire l'expression du courant volumique induit $j(r, t)$ en fonction de $\sigma, \omega, r, a, B_m, t$.

On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

6. Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule.
7. En considérant que le disque conducteur est constitué par des couronnes de rayon r , de largeur dr et d'épaisseur e , déterminer l'expression de la puissance totale P_{joule} dissipée par effet Joule dans l'ensemble du disque conducteur puis sa valeur moyenne $\langle P_{joule} \rangle$.

On montrera que $\langle P_{joule} \rangle$ peut se mettre sous la forme $\langle P_{joule} \rangle = A\omega^2 B_m^2$ où A est un coefficient que l'on exprimera en fonction de e, a, b, σ .

On se placera, pour la suite, dans le cas particulier où $a = b$. Dans ce cas le coefficient A est donné par l'expression :

$$A = \frac{\pi e \sigma a^4}{16}$$

8. Le dispositif précédent est utilisé dans les plaques électriques pour chauffer les casseroles et leur contenu.

Comment peut-on créer, en pratique, le champ magnétique souhaité ?

Citer quelques avantages de ce dispositif de chauffage par rapport aux plaques électriques classiques.

9. Le champ magnétique utilisé a une pulsation de l'ordre de $2 \times 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (courant de fréquence f de l'ordre de 30 kHz). Son intensité B_m est de l'ordre de 10^{-4} T .

On considère une plaque à induction de rayon $b = 10 \text{ cm}$ et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b = 10 \text{ cm}$, une épaisseur $e = 1,0 \text{ cm}$ et une conductivité $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance moyenne $\langle P_{joule} \rangle$ dissipée dans le fond de la casserole.

Réponses : 1 : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; 2 : $C(r, t) = \frac{j(r, t) \times 2\pi r}{\sigma}$; 3 : $r < a$ $\Phi(t) = B(t) \times \pi r^2$,

$a < r < b$ $\Phi(t) = B(t) \times \pi a^2$; 5 : $r < a$, $j(r, t) = \frac{\sigma \omega B_m r \sin(\omega t)}{2}$;

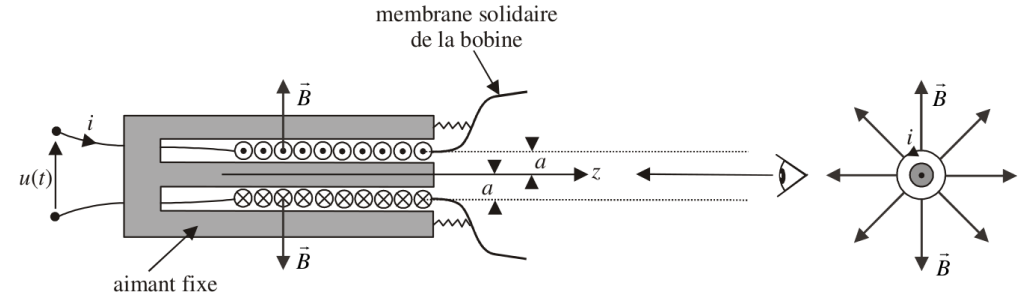
$a < r < b$, $j(r, t) = \frac{\sigma \omega B_m a^2 \sin(\omega t)}{2r}$; 6 : $P_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = j^2 / \sigma$;

7 : $\langle P_{joule} \rangle = \omega^2 B_m^2 \frac{e \sigma \pi a^4}{4} \left[\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right]$; 9 : $\langle P_{joule} \rangle \approx 5 \text{ kW}$

EM113. Principe du haut-parleur électrodynamique (**)

On considère le haut-parleur ci-dessus. L'aimant fixe crée un champ magnétique radial dans l'entrefer, de norme B constante à une distance a de l'axe de symétrie Oz du système. La membrane de masse m est solidaire d'une bobine constituée

de N spires circulaires de rayon a , de longueur totale $l_0 = N \times 2\pi a$, d'inductance propre L et de résistance R .



La bobine peut se translater sans frottement selon Oz . Un système de ressorts se comportant comme un ressort unique de raideur k la relie à l'aimant. La résistance de l'air au déplacement de la membrane est modélisée par une force $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, où \vec{v} est le vecteur vitesse de l'ensemble {bobine, membrane}. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. On soumet la bobine à une tension $u(t)$.

1. En analysant qualitativement le comportement du système, expliquer comment il peut générer une onde acoustique.
2. On repère le centre d'inertie du système {bobine, membrane} par son abscisse z . Établir l'équation mécanique du système.
3. Établir l'équation électrique du système. On établira l'expression de la f.e.m. induite dans le bobinage à l'aide d'un bilan de puissance.
4. On se place en régime sinusoïdal forcé et on utilise la notation complexe. Montrer que l'impédance électrique du haut-parleur se met sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$. Justifier le nom « impédance motionnelle » donnée à \underline{Z}_m .

Mettre $\frac{1}{\underline{Z}_m}$ sous la forme $\frac{1}{R_0} + jC_0\omega + \frac{1}{jL_0\omega}$ et donner un schéma électrique équivalent du montage faisant intervenir la résistance R_0 , l'inductance L_0 et la capacité C_0 . Exprimer L_0C_0 et commenter le résultat obtenu.

5. Faire le bilan énergétique du système. Montrer que : $\langle ui \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \lambda v^2 \rangle$. Justifier que le rendement électroacoustique du haut-parleur soit $\rho = \frac{\langle \lambda v^2 \rangle}{\langle ui \rangle}$.

Réponses : 2 : $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{il_0 B}{m}$; 3 : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) - l_0 B \dot{z}(t)$;

4 : $\underline{Z}_m = \frac{l_0^2 B^2}{m} \times \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\lambda}{m}}$; $R_0 = \frac{l_0^2 B^2}{\lambda}$; $C_0 = \frac{l_0^2 B^2}{l_0^2 B^2}$; $L_0 = \frac{l_0^2 B^2}{m\omega_0^2}$; $L_0C_0 = 1/\omega_0^2$

5 : $u \times i = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}kz^2 \right) + Ri^2 + \lambda\dot{z}^2$