

Devoir surveillé n°01 (Samedi 07 septembre, durée 4 h)

Mettre en évidence les résultats. Séparer les problèmes. Justifier les réponses.

Calculatrice autorisée

1 Atterrissage du module Philae

Rosetta est une mission spatiale européenne dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil.

La sonde spatiale s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.

Données :

- masse de la comète : $m_{com} = 1,0 \times 10^{13}$ kg
- masse volumique de la comète : $\mu_{com} = 400$ kg $\cdot$ m⁻³
- période de rotation propre de la comète : $T_{com} = 12,4$ h
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11}$ m³ $\cdot$ kg⁻¹ $\cdot$ s⁻²
- distance de largage par rapport au centre : $r_{larg} = 22,5$ km
- masse de la sonde Rosetta : $m_{ros} = 1500$ kg
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m $\cdot$ s⁻¹

Dans cette partie, la comète est modélisée par une boule homogène de masse m_{com} et de masse volumique μ_{com} .

La distance entre un point M et le centre O de la comète est notée $r = OM$.

1.1 Champ gravitationnel de la comète

1. Déterminer le rayon r_{com} de la boule équivalente à la comète.

On admet que le champ de pesanteur créé par la comète vaut :

$$\vec{g}_{com} = -G \frac{m_{com}}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > r_{com}$$

2. Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de la relation obtenue.
3. Peut-on considérer que le champ de pesanteur créé par la comète est uniforme lors de la chute du module Philae, suite à son largage ?

1.2 Trajectoire de Philae

On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel dont l'origine est le centre O de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur $\vec{u}_r$ pointe constamment vers l'atterrisseur (accélération $\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r$). Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

Approche numérique

1. Établir l'équation du mouvement de l'atterrisseur Philae, une fois séparé de Rosetta, en projection sur l'axe radial.

Cette équation peut être résolue numériquement. L'évolution temporelle de la distance r est représentée sur la figure suivante, à partir de la distance initiale $r(t = 0) = r_{larg}$ pour différentes valeurs verticales initiales $v_0 = \dot{r}(t = 0)$.

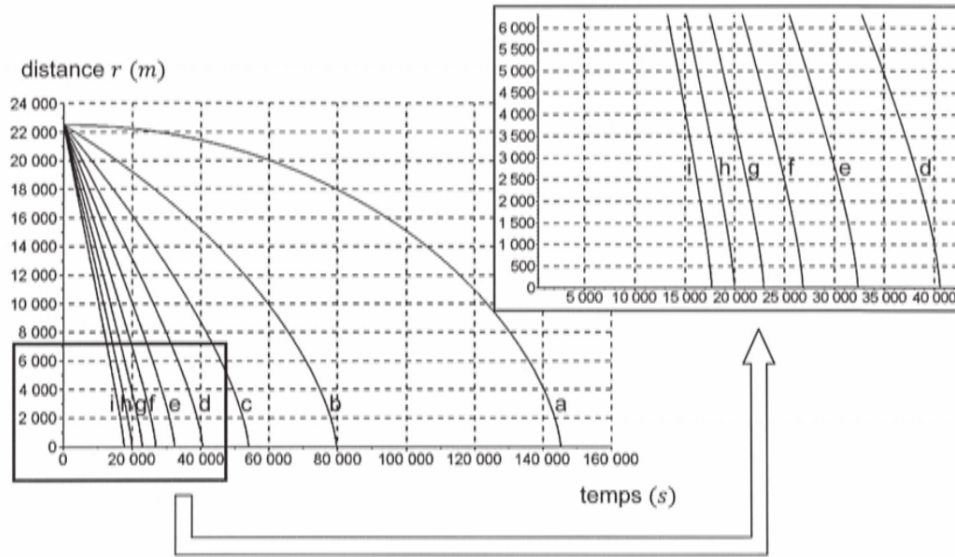


Figure 1 - Evolution temporelle de l'altitude pour différentes vitesses initiales :

a : $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	b : $v_0 = -0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	c : $v_0 = -0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
d : $v_0 = -0,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	e : $v_0 = -0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	f : $v_0 = -0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
g : $v_0 = -0,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	h : $v_0 = -1,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	i : $v_0 = -1,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- Déterminer la durée τ_0 de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle.
- La durée réelle de la chute est $\tau \approx 7 \text{ h}$. En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.

Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction de la vitesse initiale.

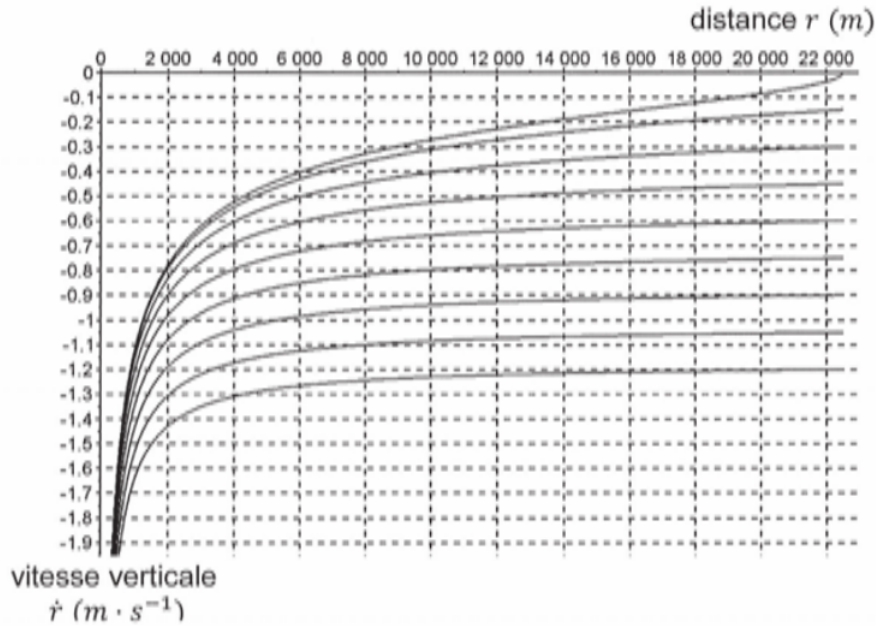


Figure 2 - Trajectoires de phase pour différentes vitesses initiales

- Déterminer, par lecture graphique, la vitesse verticale atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

Approche énergétique

L'objectif est de retrouver la vitesse atteinte par l'atterrisseur au moment du contact avec la comète

- Établir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle E_{pcom} d'un point matériel de masse m situé à la distance $r > r_{com}$ du centre de la comète, en fonction de G , m , m_{com} et r (on fixe $E_{pcom}(r \rightarrow +\infty) = 0$).

6. Lors de la chute de Philae, préciser comment évolue l'énergie mécanique de l'atterrisseur.
7. En déduire, littéralement puis numériquement, la vitesse atteinte par l'atterrisseur lors du contact avec la comète

1.3 Rosetta autour de la comète

Avant de larguer l'atterrisseur Philae, la sonde Rosetta s'est rapprochée par paliers de la comète. Le 10 septembre 2014, elle se situe sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = 30$ km.

1. Donner les expressions en coordonnées polaires de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M en mouvement circulaire.
2. Exprimer la vitesse v_1 de la sonde en orbite circulaire de rayon r_1 autour de la comète, en fonction de G , m_{com} et de r_1 . Effectuer l'application numérique.
3. En déduire sa période T_1 . Effectuer l'application numérique.
La sonde parcourt, à partir du 8 octobre 2014, une orbite elliptique avec un apocentre A situé à la distance $r_a = r_{max} = 20$ km du centre O de la comète et un péricentre P caractérisé par $r_p = r_{min} = 10$ km. Le 15 octobre, la propulsion est utilisée pour placer la sonde sur une orbite circulaire de rayon $r_p = 10$ km.
4. Représenter sur un schéma l'orbite elliptique, en faisant apparaître le centre O de la comète ainsi que les distances r_a et r_p .
5. Exprimer l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite elliptique.
6. Sur cette orbite, en déduire la vitesse v_p de Rosetta en P , en fonction de G , m_{com} , r_a et r_p . Effectuer l'application numérique.
7. Pour placer la sonde en orbite circulaire de rayon r_p , la propulsion est utilisée lorsque Rosetta est au péricentre.
Préciser numériquement la variation de vitesse nécessaire.

2 Capture d'empreintes digitales

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



Figure 1 Capteur d'empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninoff, 2009-10-21)

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre ($\mathcal{D}$) et d'une lentille convergente ($\mathcal{L}$) (figure 3). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre ($\mathcal{D}$) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille ($\mathcal{L}$) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A'_1.$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1 A'_1}, \quad D = \overline{A A'_1}, \quad p = \overline{O A_1}, \quad p' = \overline{O A'_1}.$$

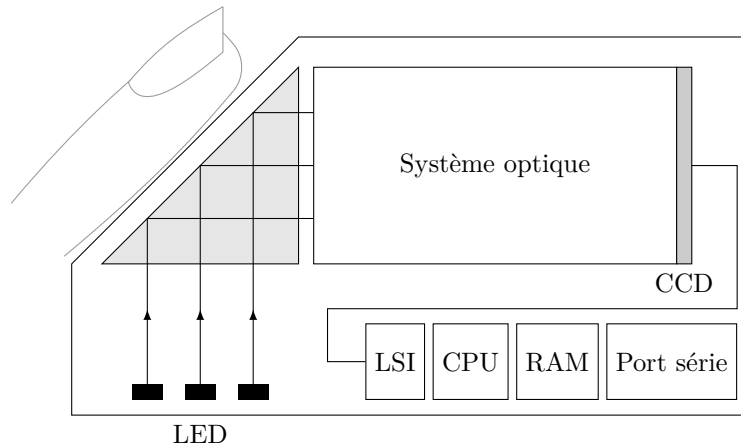


Figure 2 Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

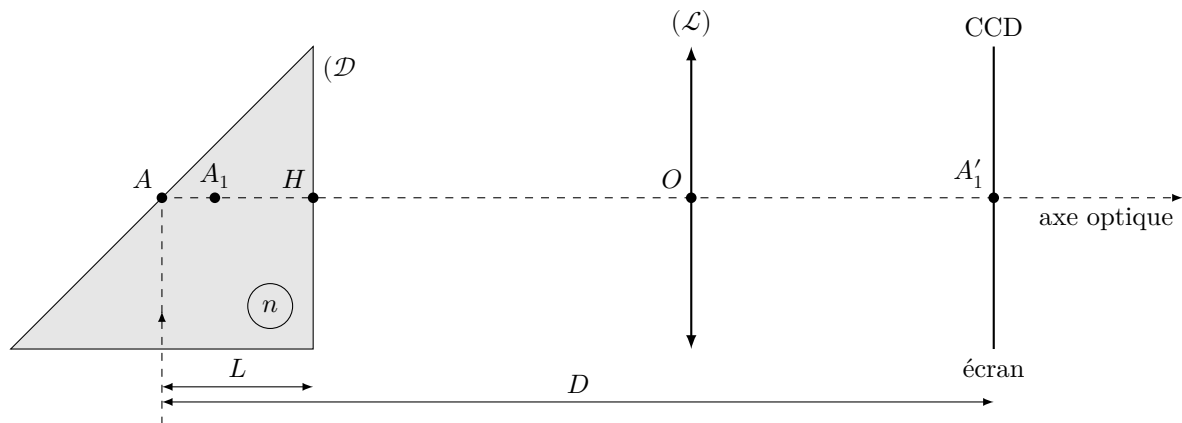


Figure 3 Schéma optique

I.A – Optique géométrique

I.A.1) Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p' . À cet effet, on donne $n = 1,5$, $L = 3$ cm, $D = 10$ cm et le grandissement transversal $\gamma = p'/p$ du système optique.

Q 1. Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre A et A_1 par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit $\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}$.

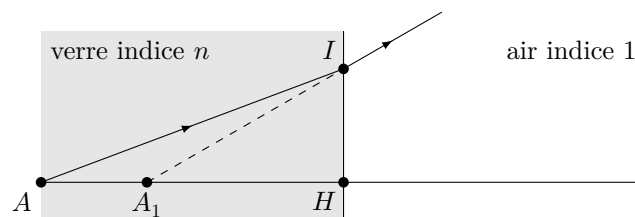


Figure 4

Q 2. Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ . Déterminer alors f' en fonction de D_1 et de γ à l'aide de la formule de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$.

Q 3. On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale f' d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance D_1 d'un objet réel. En remarquant qu'il faut $\gamma < 0$ pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport D_1/f' est inférieurement borné. En déduire l'inégalité vérifiée par f' .

Q 4. *Applications numériques.* On suppose $\gamma = -2$. À quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa focale ?

Q 5. On souhaite avoir une image la plus agrandie possible ($|\gamma|$ maximal), mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur D_1 . Dans quel sens faut-il faire varier f' ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on ?

I.A.2) Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en A_1 au lieu de A .

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne $e = 30 \mu\text{m}$ et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de $a = 100 \mu\text{m}$. On note l_c la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe A_1 , à l'écran CCD (figure 5).

Sur la figure 6, les points M_1 , M_2 et M_3 détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives M'_1 , M'_2 et M'_3 détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point M'_2 ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre ϕ .

On note p' la distance entre la lentille et la surface du CCD et $|p|$ avec $p < 0$, la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets M_1 et M_3 . On note alors $\gamma = p'/p$ le grandissement entre les couples de points conjugués (M_1, M'_1) et (M_3, M'_3) . On a $\gamma = -2$.

Q 6. À quelle condition sur a et sur l_c peut-on distinguer deux crêtes successives ? Quelle taille de pixel recommandez-vous ?

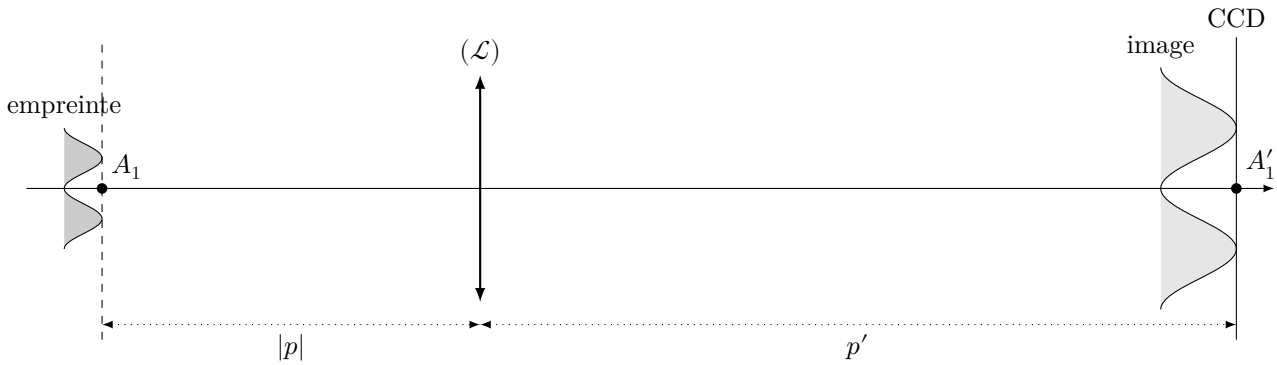


Figure 5

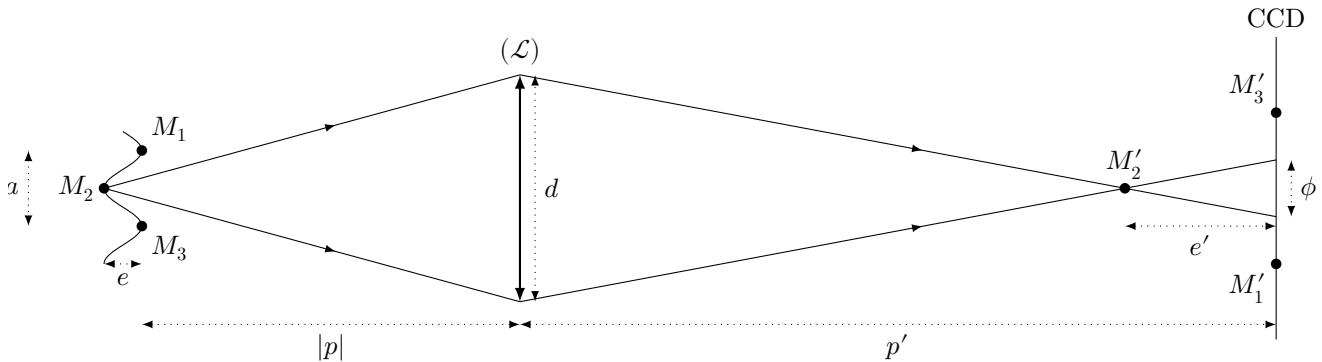


Figure 6 Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

Q 7. On note d le diamètre de la monture de la lentille $(\mathcal{L})$. Montrer que $\phi = \gamma d \frac{e}{p}$, dans l'approximation $e \ll |p|$.

En notant e' la distance de M'_2 à la surface du capteur CCD, on pourra montrer $e' \approx \gamma^2 e$.

Q 8. On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre ϕ de la tâche excède la distance $M'_1 M'_3$. Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre d de la monture ? Montrer, en argumentant sur les ordres de grandeur, que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

I.A.3) Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

Q 9. Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.

Q 10. Définir la réflexion totale et en donner les conditions.

Q 11. Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que $n = 1,5$.

3 Turboréacteur

Le turboréacteur est un système de propulsion essentiellement utilisé pour les avions. La poussée résulte de l'accélération de l'air entre l'entrée (manche à air) et la sortie (tuyère), par la combustion d'un carburant, généralement du kérosène, dans l'oxygène de l'air. Une partie de l'énergie produite est récupérée par une turbine qui sert à faire tourner le compresseur au niveau de l'entrée d'air.

Il s'agit, dans ce problème, de comparer quelques caractéristiques théoriques des moteurs qui équipent les avions de chasse et les avions de transport.

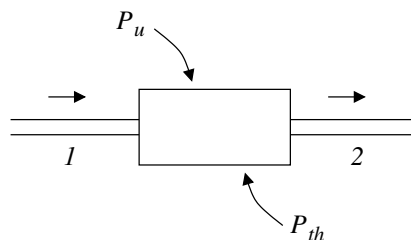
Hypothèses de travail (☞ valables pour tous les machines étudiées dans ce problème)

- L'air est considéré comme un gaz parfait de constante énergétique $\gamma = c_p/c_v$, sa capacité thermique massique à pression constante est $c_p = 1,00 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- L'écoulement est supposé unidimensionnel et le régime est permanent.
- Les variations d'énergie potentielle sont négligées.
- Les variations d'énergie cinétique sont, de la même façon, négligées, sauf, bien entendu, lors de la traversée des tuyères.
- Les seules parties mécaniques mobiles sont les compresseurs et les turbines (turbomachines). La présence d'un alternateur (générateur électrique) n'est pas prise en compte dans ce problème.
- Compresseur(s) et turbine sont liés par un arbre commun. Les pertes mécaniques par frottements, dans la turbine, dans le(s) compresseur(s) et au niveau des paliers de l'arbre qui les relie, sont négligées : la puissance mécanique cédée à la turbine est intégralement transmise au(x) compresseur(s).
- Les évolutions dans le(s) compresseur(s), la turbine et la tuyère sont supposées isentropiques.
- Les pertes de charge dans les chambres de combustion isobares sont négligées.
- Les particularités de l'air, notamment sa composition, son débit massique D_m et ses caractéristiques énergétiques c_p et γ , ne sont pas perturbées par la combustion : le mélange gazeux, au cours de l'écoulement (avant et après combustion), est assimilé à l'air.
- Le pouvoir thermique (calorifique) massique du carburant utilisé (kérosène) dans la (les) chambre(s) de combustion est $p_k = 50,0 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$.

1. Admis.

Rappel : énoncé du premier principe industriel.

Pour un fluide s'écoulant entre une entrée 1 et une sortie 2 :



$$D_m \times \Delta(h + e_c + e_p) = D_m (h_2 - h_1 + e_{c,2} - e_{c,1} + e_{p,2} - e_{p,1}) = P_u + P_{th}$$

avec D_m le débit massique, h l'enthalpie massique, e_c l'énergie cinétique massique, e_p l'énergie potentielle massique, P_u la puissance mécanique utile reçue et P_{th} la puissance thermique reçue.

Ou tout aussi bien :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q$$

avec w_u le travail massique utile et q le transfert thermique massique.

☞ **IMPORTANT** : dans toute la suite du problème et à chaque application du premier principe des systèmes ouverts en régime permanent, toute simplification de la formule devra être dûment justifiée.

2. La première application du premier principe des systèmes ouverts en régime permanent concerne le fonctionnement de la tuyère, conduite calorifugée de section variable, qui ne contient pas de paroi mobile (figure f.2).

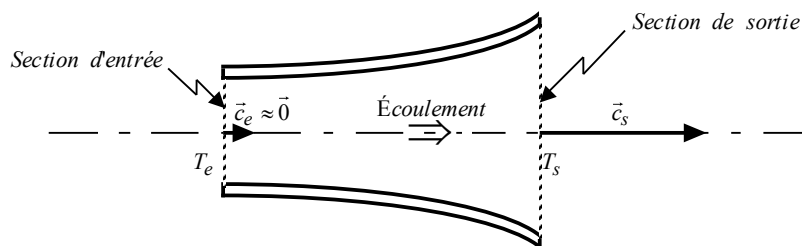


Figure f.2

Les températures, au niveau des sections d'entrée et de sortie, sont respectivement T_e et T_s . Établir l'expression de la vitesse c_s de l'écoulement à la sortie de la tuyère (la vitesse d'entrée est négligée : $c_e \approx 0 \text{ m s}^{-1}$).

II. TURBORÉACTEUR D'AVION DE CHASSE

A. Turboréacteur sans post-combustion

(40 % du barème)

Il s'agit d'étudier le modèle d'un premier réacteur, noté **(A)** (figure f.3), qui équipe les avions de chasse. Les caractéristiques de l'écoulement sont précisées ci-dessous.

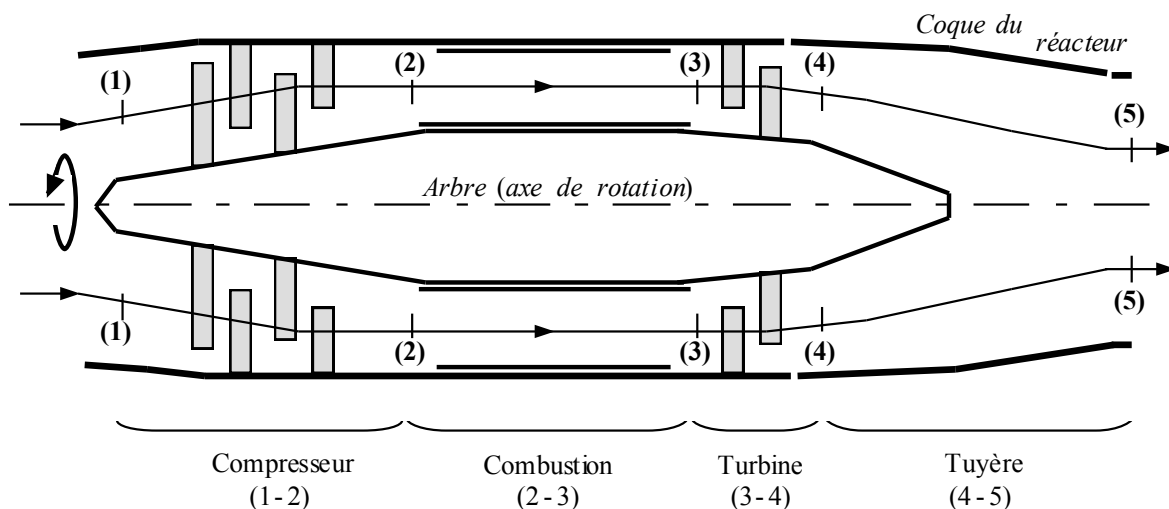


Figure f.3

Étape (1) → (2) : l'air ambiant ($T_1 = 300 \text{ K}$, $P_1 = 1,00 \text{ bar}$) est aspiré et comprimé par le compresseur, de taux de compression $\tau_{1-2} = P_2/P_1 = 10,0$; puis cet air pénètre à la température T_2 et sous la pression P_2 , dans la chambre de combustion où le carburant est injecté.

Étape (2) → (3) : grâce à la combustion du kérosène, l'air subit un réchauffement isobare ($P_3 = P_2$) jusqu'à la température $T_3 = 1200 \text{ K}$.

Étape (3) → (4) : le mélange gazeux se détend partiellement dans la turbine.

Étape (4) → (5) : les gaz sont admis dans la tuyère, conduite de section variable, où leur détente se poursuit jusqu'à la pression ambiante $P_5 = P_1 = 1,00 \text{ bar}$.

Le débit massique de l'air aspiré (et aussi de l'air refoulé) par le turboréacteur vaut $D_m = 50,0 \text{ kg s}^{-1}$.

3. Établir les expressions littérales :
 - 3.1. de la température T_2 à la sortie du compresseur (donc à l'entrée de la chambre de combustion) ;
 - 3.2. du travail indiqué massique $w_{i,1-2}$ mis en jeu dans le compresseur (1-2).
4. Le travail indiqué massique, au niveau du compresseur, vaut $w_{i,1-2} = 279 \text{ kJ kg}^{-1}$. En exploitant cette dernière donnée :
 - 4.1. déterminer la valeur numérique de la température T_2 ;
 - 4.2. même question pour la température T_4 , à la sortie de la turbine (3-4).
5. Les paramètres de température et de pression sont étudiés au niveau de la tuyère (4-5). Établir les expressions littérales :
 - 5.1. de la pression P_4 à la sortie de la turbine qui entraîne le compresseur (la valeur numérique de cette pression est $P_4 = 3,96 \text{ bar}$) ;
 - 5.2. de la température T_5 à la sortie de la tuyère.
6. Les puissances cinétiques et thermiques du turboréacteur (A) sont évaluées.
 - 6.1. Rappeler la relation simple qui existe entre la puissance cinétique P_{cin} (W) de l'air en écoulement, son débit massique D_m (kg s^{-1}) et son énergie cinétique massique e_c (J kg^{-1}).
 - 6.2. La température en (5) vaut $T_5 = 621 \text{ K}$. Déterminer littéralement, puis numériquement :
 - 6.2.1. la puissance cinétique $P_{cin,A}$ de l'écoulement à la sortie de la tuyère ;
 - 6.2.2. la puissance thermique $P_{th,A}$ reçue par l'air dans la chambre de combustion (2-3) ;
 - 6.2.3. le débit massique $D_{k,A}$ de kérosène consommé dans le turboréacteur (A) en fonctionnement.
7. Il s'agit maintenant d'établir la principale caractéristique du fonctionnement du turboréacteur (A). Calculer la valeur numérique du rendement thermique $\eta_{th,A}$, défini par le rapport $\eta_{th,A} = P_{cin,A}/P_{th,A}$.