

Devoir non surveillé n°01 (correction)

Q1. Les échanges thermiques sont définis algébriquement comme reçus par le fluide caloporteur Σ . Le réfrigérateur a pour objectif d'inverser le sens naturel des échanges thermiques en **refroidissant la source froide**, ce qui impose $Q_f > 0$ et évacuer l'énergie thermique dans la source chaude, ce qui impose $Q_c < 0$. Cette évolution non spontanée nécessite un apport d'énergie associé au **travail du compresseur** ($W > 0$), le réfrigérateur est un récepteur.

Q2. L'énergie utile est Q_f (refroidir l'intérieur du réfrigérateur) et l'énergie coûteuse est W , ce qui donne :

$$e_f = \frac{Q_f}{W}$$

On a :

- $0 = \Delta U = W + Q_c + Q_f$ (premier principe sur un cycle pour le fluide caloporteur) ;
- $0 = \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{irr.}$ (second principe sur un cycle pour le fluide caloporteur avec $S_{irr} > 0$) ;

Ce qui donne pour l'efficacité :

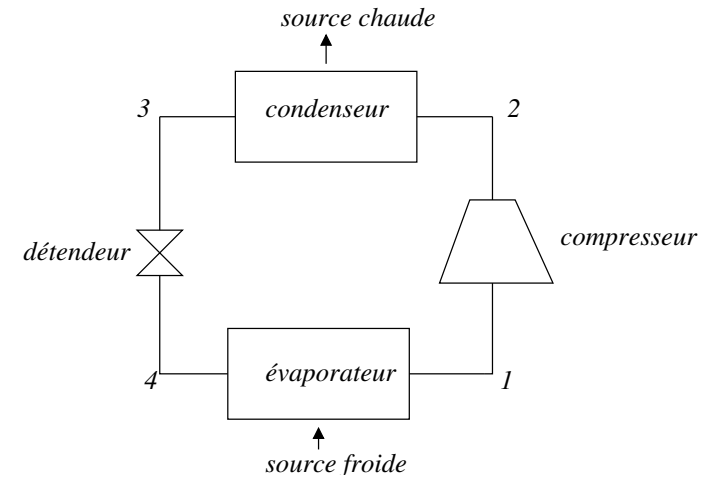
$$e = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{-1 - Q_c/Q_f}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f} \Leftrightarrow \frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f} \Leftrightarrow \frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f} \\ \Leftrightarrow -\frac{Q_c}{Q_f} \geq \frac{T_c}{T_f} &\Leftrightarrow -1 - \frac{Q_c}{Q_f} \geq -1 + \frac{T_c}{T_f} \Leftrightarrow \frac{1}{-1 - Q_c/Q_f} \leq \frac{1}{-1 + T_c/T_f} \end{aligned}$$

On en déduit $e_f \leq e_f = \frac{T_f}{T_c - T_f}$, avec e_f^{max} l'efficacité de Carnot obtenue pour une évolution réversible.

Q3. Schéma synoptique :



Q4. Explications du tracé du diagramme $P - h$ situé en annexe :

- l'évaporation isobare à $T = 0^\circ\text{C}$ correspond à une pression fixée (équilibre liquide-vapeur) d'environ $P \approx 2,9$ bar. La surchauffe pour atteindre le point « 1 » étant isobare, le point « 1 » se situe à l'intersection de l'horizontale $P \approx 2,9$ bar et de l'isotherme $T = 10^\circ\text{C}$;
- la compression est adiabatique et réversible donc isentropique. Partant du point « 1 », on suit donc une isentropique pour atteindre le point « 2 » à la pression de 10 bar qui correspond à la pression de changement d'état à $T = 40^\circ\text{C}$ (Cf. étape suivante) ;
- la condensation suit l'isobare $P = 10$ bar ; le point « 3 » se situe à l'intersection de cette isobare et de l'isotherme $T = 30^\circ\text{C}$. Pour un liquide quasi-incompressible, l'enthalpie massique est uniquement fonction de la température, donc dans le domaine du liquide, les isothermes sont des droites verticales et il suffit de prolonger verticalement l'indication $T = 30^\circ\text{C}$ de la courbe d'ébullition.
- la détente est isenthalpique (évolution verticale), et ramène le fluide à la pression d'évaporation $P = 2,9$ bar.

Grâce aux caractéristiques (P, h, T, s) des points obtenues sur le diagramme $P-h$ (Cf. question suivante), on peut alors placer ces points sur le digramme $T-s$.

Q5. On obtient par lecture graphique :

point	1	2s	3	4
P (bar)	2,9	10	10	2,9
T (°C)	10	53	30	0
état fluide	vapeur	vapeur	liquide	mélange liq./vapeur
h (kJ · kg ⁻¹)	407	432	242	242

Q6. La température dans l'évaporateur doit être inférieure à la température de la source froide pour assurer que le transfert thermique s'opère de la source froide vers le fluide caloporteur.

La température dans le condenseur doit être supérieure à la température de la source chaude pour assurer que le transfert thermique s'opère du fluide caloporteur vers la source chaude.

Q7. On suppose l'absence de pertes de charge au sein de la canalisation (**fluide sans viscosité**).

Q8. Pour un gaz parfait, la deuxième loi de Joule indique que l'enthalpie massique est une unique fonction de la température : $dh = c_p dT$.

Dans le diagramme de Mollier, les isenthalpiques sont de droites verticales, il devrait donc en être de même de la température si la vapeur sèche était un gaz parfait ($h = cste \Rightarrow T = cste$). Ceci n'est pas le cas dans la zone de compression où les isothermes se courbent et une même valeur de température coupent plusieurs isenthalpiques différentes. **La vapeur sèche ne peut être assimilée à un gaz parfait dans cette zone.**

De la même manière dans le diagramme $T-s$, les isothermes sont des horizontales, les isenthalpiques ne le sont pas, **le modèle du gaz parfait ne s'applique pas à cette vapeur sèche.**

Q9. Avec la formule proposée :

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2s} - h_1}{\eta} = 407 + \frac{432 - 407}{0,75} \quad \boxed{h_2 = 440 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

On peut alors placer sur le graphique le point « 2 » avec pour abscisse l'enthalpie massique $h_2 = 440 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et pour ordonnée $P = 10$ bar.

Q10. Grâce au diagramme, on lit une température légèrement inférieure à 60°C au point « 2 », $\boxed{T_2 \approx 58^\circ\text{C}}$.

Q11. Connaissant la température, l'enthalpie massique et la pression, on détermine la position du point « 2 » sur le diagramme entropique.

Q12. Très généralement $\Delta s = s^e + s^c$, l'évolution étant ici adiabatique : $s^e = 0$ et $\Delta s = s^c \geq 0$

— pour l'évolution réversible initiale : $s_{2s} - s_1 = 0$;

— pour l'évolution réelle irréversible : $s_2 - s_1 > 0$;

On en déduit $\boxed{s_2 > s_{2s}}$ et un déplacement vers la droite.

Q13. Cf. énoncé.

Q14. Pour un réfrigérateur de hauteur caractéristique $h = 2$ m, la variation d'énergie potentielle massique maximale vaut $\boxed{\Delta e_p^{max} = gh \approx 20 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}}$. Lors des évolutions, les variations d'enthalpie massique sont de l'ordre de $100 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.

Q15. Le fluide qui traverse une section S pendant dt à la vitesse V est contenu dans un volume $SVdt$ en amont de S , ce qui représente une masse $\delta m = \rho SVdt$ avec $\rho = 1/v$ la masse volumique, inverse du volume massique, donc :

$$D = \frac{\delta m}{dt} = \rho SV \Rightarrow \boxed{D = \frac{SV}{v}}$$

Q16. De manière générale, pour une masse donnée, la vapeur occupe un plus grand volume que le liquide. De plus la vapeur voit nécessairement son volume diminuer lors de la compression. On peut raisonnablement penser que **le volume massique est maximal au point 1.**

Q17. De la formule précédente, on déduit :

$$V^{max} = \frac{Dv^{max}}{S} = \frac{1 \times 10^{-2} \times 7 \times 10^{-2}}{10^{-4}} \Rightarrow \boxed{V^{max} = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Q18. La variation maximale d'énergie cinétique serait de l'ordre de :

$$\boxed{\Delta e_c^{max} \approx \frac{(V^{max})^2}{2} \approx 25 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

Ce terme est très faible devant les variations d'enthalpie massique.

Q19. Sur l'étape $1 \rightarrow 2$, le seul échange est associé au travail du compresseur ; pour cette évolution adiabatique, le premier principe industriel conduit à :

$$w = \Delta h_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1$$

Sur la phase $4 \rightarrow 1$, le seul échange est le transfert thermique avec la source froide, le premier principe industriel conduit à :

$$q_f = \Delta h_{4 \rightarrow 1} = h_1 - h_4$$

Ce qui donne pour l'efficacité : $\boxed{\eta_f = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}}$.

Q20. Application numérique :

$$\eta_f = \frac{407 - 242}{440 - 407} \Rightarrow \boxed{\eta_f = 5,0}$$

Q21. Les puissances et les grandeurs massiques sont liées *via* le débit massique :

$$\mathcal{P}_{th}^f = D \times q_f = 1 \times 10^{-2} \times 165 \times 10^3 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{th}^f = 1,7 \text{ kW}}$$

$$\mathcal{P} = D \times w = 1 \times 10^{-2} \times 33 \times 10^3 \Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = 0,33 \text{ kW}}$$

Q22. Surchauffer la vapeur permet :

- **d'éviter la présence de liquide quasi-incompressible** avant l'entrée dans le compresseur ;
- de déplacer le point 1 vers la droite et **d'augmenter ainsi q_f et donc l'efficacité.**

Q23. Sous-refroidir le liquide permet de déplacer le point 3 vers la gauche et donc le point 4 vers la gauche ce qui **contribue également à augmenter q_f** et ainsi l'efficacité.

Le refroidissement n'est possible que si le fluide est plus chaud que la source chaude qui s'identifie à la température de la pièce, et plus précisément l'arrière du réfrigérateur dont la température peut être de l'ordre de 25°C.

Q24. Explications du nouveau tracé sur le diagramme $P - h$:

- partant du point « 4 », on suit l'isobare $P = 2,9$ bar jusqu'au point « 4' » ;
- on descend verticalement (détente isenthalpique) jusqu'à l'isobare $P = 1,3$ bar (attention échelle logarithmique) pour atteindre la température $T = -20^\circ\text{C}$ (point « 4'' ») ;
- on suit alors une horizontale (isobare) jusqu'à une phase vapeur à la température $T = 0^\circ\text{C}$;
- connaissant alors l'enthalpie massique du point « 1' » $h_{1'} \approx 401 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et sachant que $h_4 = 242 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, on peut alors déterminer l'enthalpie massique des points « 4 » et « 4' », $\boxed{h_4 = h_{4'} \approx 321 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$;

Q25. Cf. figure en annexe.

Q26. En passant de « 4 » à « 4' », le point représentatif se rapproche de la courbe de rosée et s'éloigne de la courbe d'ébullition, **la proportion de vapeur augmente.**

Q27. Calcul de la nouvelle efficacité :

$$e_f = \frac{q'_f}{w'} = \frac{h_{1'} - h_4}{h_{2'} - h_{1'}} = \frac{401 - 242}{463 - 401} \Rightarrow \boxed{e_f = 2,6}$$

Q28. $\boxed{\lambda > 0}$, en effet pour $T_c > T$, le transfert thermique doit s'effectuer de l'extérieur vers l'intérieur du réfrigérateur.

Q29. On applique un premier principe à l'intérieur du réfrigérateur pendant une durée dt :

$$CdT = P_{th}dt = \lambda(T_c - T(t))dt \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_c}{\tau}}$$

où l'on a posé $\tau = \frac{C}{\lambda}$ la constante de temps du système.

Q30. La solution générale de cette équation est de la forme :

$$T(t) = Ae^{-t/\tau} + T_c \text{ avec } T(t=0) = T_f = A + T_c$$

On en déduit : $\forall t > 0, T(t) = (T_f - T_c)e^{-t/\tau} + T_c$.

Q31. À l'instant initial $\boxed{T_f = 278 \text{ K}}$. À temps infini, la température tend vers la température extérieure $\boxed{T_c = 293 \text{ K}}$.

Q32. En réécrivant l'équation donnant la température au cours du temps et en prenant le logarithme, on en déduit :

$$\frac{T(t) - T_c}{T_f - T_c} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{T(t) - T_c}{T_f - T_c}\right) = -\frac{t}{\tau}}$$

On obtient une relation linéaire en cohérence avec le graphique avec une pente $-1/\tau$. Graphiquement, on détermine :

$$\frac{-1}{\tau} = \frac{-4,8}{50 \text{ h}} \Rightarrow \boxed{\tau = 10,4 \text{ h}}$$

Notons que cette constante de temps semble cohérente avec le temps de réchauffement d'un réfrigérateur. On en déduit alors :

$$\lambda = \frac{C}{\tau} = \frac{3 \times 10^5}{10,4 \times 3600} \Rightarrow \boxed{\lambda = 8,0 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}}$$

Q33. L'efficacité est supposée égale au quart de l'efficacité maximale :

$$e_f = K \times \frac{T_f}{T_c - T_f} = 0,25 \times \frac{277}{293 - 277} \Rightarrow \boxed{e_f = 4,3}$$

Q34. Le terme « fuite » n'est pas très bien choisi car il s'agit en fait de la puissance thermique qui entre dans le réfrigérateur du fait d'une isolation thermique non idéal. En régime permanent :

$$\mathcal{P}_{th} = \lambda \times (T_c - T_f) = 8,0 \times (293 - 277) \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{th} = 1,3 \times 10^2 \text{ W}}$$

Q35. En régime permanent, les apports thermiques qui entrent dans le réfrigérateur ($\mathcal{P}_{th}$) doivent être équilibrés par ce que l'on prélève à l'intérieur du réfrigérateur : $\mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{th}$. En tenant compte de l'efficacité du réfrigérateur, on en déduit :

$$\mathcal{P}_C = \frac{\mathcal{P}_f}{\eta_f} = \frac{1,3 \times 10^2}{4,3} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_C = 30 \text{ W}}$$

Q36. On applique un premier principe à l'intérieur du réfrigérateur pendant une durée dt . Le système cède une puissance P_f (de la source froide, l'intérieur du réfrigérateur, vers le fluide caloporteur) et reçoit P_{th} associée aux « fuites » :

$$CdT = -\mathcal{P}_f dt + \mathcal{P}_{th} dt = -\mathcal{P}_f dt + \lambda(T_C - T(t))dt$$

L'efficacité du réfrigérateur vaut : $e_f = \frac{\mathcal{P}_f}{\mathcal{P}_c}$. On sait d'autre part qu'elle vaut

$K = 0,25$ fois l'efficacité du système réversible : $e_f = K \frac{T(t)}{T_c - T(t)}$ avec $T(t)$ la température variable de la source froide ; en comparant les deux expressions, on peut alors exprimer $\mathcal{P}_f$ et on en déduit :

$$CdT = -\frac{K\mathcal{P}_c \times T(t)}{T_C - T(t)} dt + \lambda(T_C - T(t))dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = -\frac{K\mathcal{P}_c}{C} \times \frac{T(t)}{T_C - T(t)} + \frac{\lambda}{C}(T_C - T(t))}$$

On en déduit : $\boxed{A = \frac{K\mathcal{P}_c}{C}}$ et $\boxed{B = \frac{\lambda}{C}}$.

Q37. En l'absence de fuites, l'équation se simplifie selon :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-AT(t)}{T_C - T(t)} \Leftrightarrow \frac{T_C - T(t)}{T} dT = -A dt$$

On intègre alors entre l'état initial $T_f = T_C$ et un état quelconque $T(t)$:

$$\int_{T_C}^{T(t)} \left(\frac{T_C}{T} - 1 \right) dT = -A \int_0^t dt$$

$$T_C \ln \left(\frac{T(t)}{T_C} \right) - (T(t) - T_C) = -A \times t \Rightarrow \boxed{t_f = \frac{1}{A} \times \left[T_C \ln \left(\frac{T_C}{T_f} \right) - (T_C - T_f) \right]}$$

Q38. Sans surprise, comme le réfrigérateur est réchauffé par l'extérieur du fait des fuites, il met plus de temps à atteindre la température de consigne avec $t_f \approx 18 \text{ h}$.