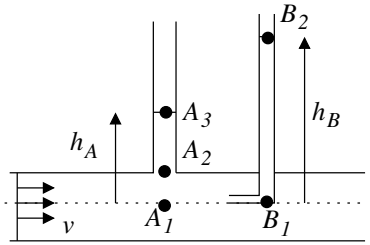
Lycée Naval, Spé 2.

TD06 : bilans (correction)

Bilan046. Tube de Pitot (*)

→ Entre A_1 et A_2 le système se déplace en bloc, puis l'eau est immobile entre A_2 et A_3, la loi de l'hydrostatique est applicable entre A_1 et A_3 :

$$P_{A_1} = P_{A_3} + \rho g h_A = P_0 + \rho g h_A$$



→ On applique la relation de Bernoulli entre A_1 et B_1 (fluide au repos en B_1, point d'arrêt) :

$$P_{A_1} + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_{B_1}$$

→ Entre B_1 et B_2, on applique la loi de l'hydrostatique pour le fluide au repos :

$$P_{B_1} = P_{B_2} + \rho g h_B = P_0 + \rho g h_B$$

En combinant les trois relations, on en déduit :

$$v^2 = 2g(h_B - h_A)$$

Et donc pour le débit volumique, en appelant S la section :

$$\boxed{D_v = S \times \sqrt{2g(h_B - h_A)}}$$

Bilan014. Vidange d'un réservoir (**)

1. Le régime est permanent, l'écoulement incompressible et homogène (eau) et on négligera les phénomènes dissipatifs.
   On applique la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre A un point de la surface libre au repos et B un point **à l'air libre** (pression atmosphérique) au niveau de la sortie de l'orifice :
   $$\frac{P_0}{\mu} + g z_A = \frac{P_0}{\mu} + \frac{v_0^2}{2} + g z_B$$
   On en déduit $\boxed{v_0 = \sqrt{2gh_0}}$.
2. Pendant $\mathrm{d}t$, on perd un volume $-\mathrm{d}h \times S$ (au niveau de la surface libre), $\mathrm{d}h$ est négatif, le niveau baisse. Dans la même durée, un volume $sv(t)\mathrm{d}t$ s'écoule en sortie. Pour un écoulement incompressible, le débit volumique est le même en entrée et en sortie du dispositif, ce qui impose :
   $$\boxed{-S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = sv(t)}$$
3. En utilisant les deux expressions donnant $v(t)$, on obtient l'équation différentielle :
   $$-\frac{S}{s}\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gh(t)} \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}h}{h^{1/2}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\mathrm{d}t$$
   On intègre cette équation entre $t = 0$ et t quelconque, pour des hauteurs de fluide variant de h_0 à $h(t)$:
   $$2h(t)^{1/2} - 2h_0^{1/2} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g} \times t \quad \text{donc} \quad \boxed{h(t)^{1/2} = h_0^{1/2} - \frac{s}{2S}\sqrt{2g} \times t}$$
   La durée de vidange correspond à $h(T) = 0$, soit :
   $$h_0^{1/2} = \frac{s}{2S}\sqrt{2g} \times T \quad \text{donc} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \times \frac{S}{s}}$$

Bilan022. Jet d'eau sur une plaque (**)

1. Dans le cas de l'eau, l'écoulement peut être supposé incompressible et homogène. On se place en régime stationnaire en l'absence de dissipation, on peut donc appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre l'amont et l'aval (en haut à droite de la figure) :
   $$\frac{P_{amont}}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g z_{amont} = \frac{P_{aval}}{\mu} + \frac{v_1^2}{2} + g z_{aval}$$
   En amont et en aval, l'écoulement est supposé uniforme sur une section droite, la pression est donc uniforme égale à la pression atmosphérique. Les effets de la pesanteur sont négligés, la relation de Bernoulli se simplifie selon :
   $$v = v_1$$
   Le même résultat peut être obtenu pour une ligne de courant qui émerge en bas à gauche de la figure. En conclusion :
   $$\boxed{v = v_1 = v_2}$$
2. On considère comme système : le fluide délimité par le polygone, plus la petite quantité de fluide qui s'apprête à entrer dans ce polygone pendant $\mathrm{d}t$, ainsi que la plaque.
   On applique le théorème de la quantité de mouvement à ce système entre t et $t + \mathrm{d}t$:
   $$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}_{ext}\mathrm{d}t = \left(\vec{F}_{pres.} + \vec{F}_0\right)\mathrm{d}t$$

Le régime étant stationnaire et la plaque immobile, la variation de quantité de mouvement s'identifie à la différence des quantités qui entrent et sortent du polygone pendant $\mathrm{d}t$.

$$\mathrm{d}\vec{p} = \delta\vec{p}_s - \delta\vec{p}_e = \delta m_1\vec{v}_1 + \delta m_2\delta\vec{v}_2 - \delta m\vec{v}$$

La pression dans l'air vaut P_0, l'écoulement étant uniforme en amont et en aval, la pression vaut également P_0 dans le jet en amont et en aval. La pression est donc uniforme sur l'ensemble du contour du système, la force résultante est nulle. On en déduit :

$$D_{m1}\vec{v}_1 + D_{m2}\vec{v}_2 - D_m\vec{v} = \vec{F}_0$$

Pour éliminer l'inconnue $\vec{F}_0$, on projette cette équation sur l'axe Ox :

$$D_{m1}v_1 - D_{m2}v_2 - D_m v\sin(\alpha) = 0$$

Avec $v = v_1 = v_2$, on en déduit :

$$D_{m1} - D_{m2} = D_m\sin(\alpha)$$

On sait de plus qu'en régime stationnaire la conservation du débit massique impose $D_m = D_{m1} + D_{m2}$. En combinant avec la relation précédente, on en déduit :

$$\boxed{D_{m1} = \frac{D_m}{2}\left[1+\sin(\alpha)\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{D_{m2} = \frac{D_m}{2}\left[1-\sin(\alpha)\right]}$$

3. On projette maintenant la relation vectorielle selon Oy :

$$-D_m \times \left[-v\cos(\alpha)\right] = F_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_0 = D_m v\cos(\alpha)\vec{u}_y}$$

4. Pour $\alpha = 0$, la situation est symétrique par rapport à l'axe Oy, les débits en sortie sont égaux $D_{m1} = D_{m2} = D_m/2$ et la quantité de mouvement du fluide selon Oy est arrêtée par la plaque, en conséquence :

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{0} - \delta m \times \vec{v} = \vec{F}_0\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_0 = -D_m\vec{v}$$

Ces résultats sont cohérents avec le cas général en posant $\alpha = 0$.

Bilan015. Propulsion d'une fusée (**)

1. Pour cet exercice, le régime n'est pas permanent, il faut effectuer le bilan de quantité de mouvement avec prudence.
Comme proposé dans l'énoncé, dans le référentiel géocentrique galiléen, on applique le théorème de la résultante cinétique au système $\mathcal{S}$ constitué, à l'instant t, par la fusée et son contenu.

$$\mathrm{d}\vec{p} = m(t)\vec{g}\times\mathrm{d}t$$

⋆ À l'instant t le système $\mathcal{S}$ est entièrement situé dans la fusée, sa masse est $M(t)$ et sa vitesse est, selon Oz, $v(t)$:

$$p(t) = M(t)v(t)$$

⋆ À l'instant $t+\mathrm{d}t$, le système $\mathcal{S}$ est constitué de la fusée et du fluide éjecté ; la fusée a une masse $M(t+\mathrm{d}t) = M(t)+\mathrm{d}M$ et une vitesse $v(t+\mathrm{d}t) = v(t)+\mathrm{d}v$, le fluide éjecté a une masse $-\mathrm{d}M$ et une vitesse $(v(t)-u)$ par rapport au référentiel géocentrique :

$$p(t+\mathrm{d}t) = (M(t)+\mathrm{d}M)(v(t)+\mathrm{d}v) + (-\mathrm{d}M)\times(v(t)-u)$$

$$\mathrm{d}p = p(t+\mathrm{d}t) - p(t) = M(t)\mathrm{d}v + \mathrm{d}M\times u \quad \text{à l'ordre 1}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}p = M(t)\mathrm{d}v + \mathrm{d}M\times u = -M(t)g\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{1}{M(t)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\times u$$

Comme $\mathrm{d}M < 0$ (le mélange combustible est éjecté), $D_m = -\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{1}{M(t)}\times D_m\times u \quad \text{avec} \quad M(t) = M_0 + m(t)}$$

2. La fusée décolle si l'accélération initiale est positive :

$$-g + \frac{1}{M(0)}\times D_m\times u > 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{D_m > D_{m,0} = \frac{(M_0+m_0)g}{u}}$$

3. À l'instant initial, la masse de combustible est m_0.
Le combustible est éjecté avec un débit massique D_m, à l'instant t, il reste :

$$m(t) = m_0 - D_m\times t$$

On peut alors intégrer l'accélération pour obtenir la vitesse :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{D_m u}{M_0+m_0-D_m t} \quad \boxed{v(t) = -gt - u\ln\left(\frac{M_0+m_0-D_m t}{M_0+m_0}\right)}$$

Le combustible est entièrement consommé à l'instant t_f défini par :

$$m(t_f) = 0 = m_0 - D_m t_f \quad \text{donc} \quad \boxed{t_f = m_0/D_m}$$

Ce qui donne pour la vitesse à l'instant t_f :

$$\boxed{v_f = -\frac{gm_0}{D_m} + u\ln\left(\frac{M_0+m_0}{M_0}\right)}$$

Bilan024. Principe d'une éolienne (***)

Première Partie. Puissance du vent

1. L'air qui traverse la surface S pendant $\mathrm{d}t$ correspond aux particules de fluide qui ne sont pas plus éloignées que $v_0\mathrm{d}t$ de la surface, soit une masse :

$$\boxed{\delta m = \rho v_0\mathrm{d}t S}$$

2. Cette masse est associée à une énergie cinétique :

$$\delta E_c = \frac{1}{2}\delta m v_0^2 \quad \text{soit} \quad \delta E_c = \frac{\rho v_0 \mathrm{d}t S}{2} v_0^2$$

Ceci est l'énergie cinétique qui traverse la section S pendant $\mathrm{d}t$. En divisant par $\mathrm{d}t$, on obtient la puissance du vent :

$$\boxed{\mathcal{P}_v = \frac{\rho v_0^3 S}{2}}$$

Deuxième Partie. Étude de l'écoulement

1. Bilan de masse
   (a) Pour un écoulement unidimensionnel $D_m = \rho S(x) v(x)$.
   (b) Pour un écoulement permanent, le débit massique se conserve.
   (c) Le fluide étant de plus incompressible, en écrivant la conservation du débit volumique sur les trois sections, on obtient :
   $$\boxed{v_0 S_1 = vS} \quad \text{et} \quad \boxed{vS = v_s S_2}$$
   (d) L'éolienne tire son énergie du vent, l'écoulement d'air est nécessairement plus lent en aval qu'en amont, $v_s < v_0$, ce qui impose d'après la relation précédente, $S_2 > S_1$ et explique l'évasement du tube de courant.
2. Bilan de quantité de mouvement
   (a) On considère le système constitué à l'instant t, du fluide contenu entre S_1 et S_2 et du fluide qui entre dans ce domaine pendant $\mathrm{d}t$. On appelle $\vec{F}$ la force exercée par l'hélice sur le fluide.
   $$\mathrm{d}\vec{p} = \left(\vec{F} + \vec{F}^{pression}\right) \mathrm{d}t$$
   La pression est uniforme sur l'ensemble de la surface de contrôle, $\vec{F}^{pression} = \vec{0}$.
   Le régime étant stationnaire, la variation de quantité de mouvement se limite aux quantités qui entrent et sortent du domaine pendant $\mathrm{d}t$:
   $$\mathrm{d}\vec{p} = (\delta m \times \vec{v}_s - \delta m \times \vec{v}_0)$$
   On en déduit :
   $$\boxed{\vec{F} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_0)}$$
   (b) On applique le théorème de la résultante cinétique au système comprenant le fluide contenu à l'instant t entre S_A et S_B et le fluide qui va entrer pendant $\mathrm{d}t$ dans ce domaine.
   $$\mathrm{d}\vec{p} = \left(\vec{F} + \vec{F}^{pression}\right) \mathrm{d}t$$
   Pour deux sections infiniment voisines, la force de pression se limite aux forces en amont et en aval.
   $$\vec{F}^{pression} = (P_A S_A - P_B S_B)\,\vec{u}_x = (P_A - P_B)\,S\vec{u}_x$$
   Le régime étant stationnaire, la variation de quantité de mouvement se limite aux quantités qui entrent et sortent du domaine pendant $\mathrm{d}t$; la vitesse étant la même en A et en B, $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{0}$
   On en déduit : $\vec{F} = (P_B - P_A)\,S\vec{u}_x$, donc $\boxed{\vec{F} = S\Delta P \vec{u}_x}$
   (c) De la comparaison des deux expressions, on déduit :
   $$\boxed{S\Delta P \vec{u}_x = D_m\,(\vec{v}_s - \vec{v}_0)}$$
3. Bilan énergétique
   (a) Dans un référentiel galiléen, pour un écoulement parfait incompressible et stationnaire, le long d'une ligne de courant allant de 1 à 2, la relation de Bernoulli s'écrit :
   $$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} + g z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho} + g z_2$$
   (b) Applications de la relation de Bernoulli :
   Entre S_1 et S_A : $\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{P_0}{\rho} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{P_A}{\rho}$
   Entre S_B et S_2 : $\frac{1}{2}v^2 + \frac{P_B}{\rho} = \frac{1}{2}v_s^2 + \frac{P_0}{\rho}$
   (c) De la comparaison des deux expressions, on en déduit :
   $$\boxed{P_B - P_A = \Delta P = \frac{1}{2}\rho\left(v_s^2 - v_0^2\right)}$$
4. Rendement de l'éolienne
   (a) Le débit massique évalué au niveau de la section S s'écrit : $D_m = \rho v S$, on a donc :
   $$S\Delta P = \rho v S\,(v_s - v_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \rho v (v_s - v_0)$$
   De plus la variation de pression s'exprime à l'aide de la question précédente selon :
   $$\Delta P = \frac{1}{2}\rho\,(v_s - v_0)\,(v_s + v_0)$$
   La comparaison des deux expressions conduit à : $\boxed{v = \frac{v_0 + v_s}{2}}$
   (b) On a précédemment obtenu :
   $$\vec{F} = S\Delta P \vec{u}_x \quad \text{donc} \quad \vec{F} = \frac{S\rho}{2}\left(v_s^2 - v_0^2\right)\vec{u}_x$$

La troisième loi de Newton assure que la force exercée par le fluide sur l'hélice est l'opposé de la force exercée par l'hélice sur le fluide :

$$\boxed{\vec{F}_f = \frac{S\rho}{2}\left(v_0^2 - v_s^2\right)\vec{u}_x}$$

(c) Rendement de l'éolienne :

i. On a :

$$P_h = F_f v = \frac{S\rho}{2}\left(v_0^2 - v_s^2\right) \times \left(\frac{v_s + v_0}{2}\right) = \frac{\rho S v_0^3}{4}\left(1-\lambda^2\right)(1+\lambda)$$

La puissance du vent vaut : $P_v = \frac{1}{2}\rho S v_0^3$, ce qui donne pour le rendement :

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}\left(1-\lambda^2\right)(1+\lambda)}$$

ii. La vitesse du vent en sortie ne peut dépasser v_0 et ne peut être nulle (le débit volumique se conserve), il s'agit d'étudier le rendement pour $\lambda \in [0,1]$.
Dans cet intervalle, le rendement passe par un maximum pour $\boxed{\lambda = 1/3}$.

iii. Pour cette valeur de λ :

$$\boxed{\eta_m = \frac{16}{27} \approx 0,59}$$

Il s'agit du rendement théorique limite de l'éolienne. Il est important de comprendre que, même en l'absence de phénomènes dissipatifs, il est impossible de récupérer 100% de l'énergie cinétique du vent. Une des raisons est que le débit volumique se conserve et que la vitesse du vent ne peut être nulle en sortie de l'éolienne.

En pratique, le rendement est encore plus faible car les phénomènes de dissipation ont été négligés : viscosité, turbulence,...

Bilan018. Échangeur à contre courant (***)

1. On applique un premier principe industriel pour le fluide 1 entre x et $x+\mathrm{d}x$. Dans le cas présent, seule la variation d'enthalpie est à prendre en compte :

$$D_1\Delta h = -\delta P \quad \Rightarrow \quad D_1 c_1\left[T_1(x+\mathrm{d}x) - T_1(x)\right] = -G\left[T_1(x) - T_2(x)\right]\mathrm{d}x$$

Le signe « − » provient du fait que la puissance thermique est définie comme étant cédée par le fluide 1 au fluide 2.

On en déduit : $\boxed{D_1 c_1 \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} = -G\left[T_1(x) - T_2(x)\right] \quad \text{équation 1}}$.

Du fait du sens d'écoulement du fluide 2 ; on applique un premier principe industriel pour ce fluide entre $x+\mathrm{d}x$ et x :

$$D_2\Delta h = \delta P \quad \Rightarrow \quad D_2 c_2\left[T_2(x) - T_2(x+\mathrm{d}x)\right] = G\left[T_1(x) - T_2(x)\right]\mathrm{d}x$$

On en déduit : $\boxed{D_2 c_2 \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} = -G\left[T_1(x) - T_2(x)\right] \quad \text{équation 2}}$

2. Avec $D_1c_1 = D_2c_2 = Dc$, la différence des deux équations différentielles conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T_1 - T_2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = cste = T_{1A} - T_{2A}$$

On reporte dans l'équation 2 :

$$Dc\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} = -G\left(T_{1A} - T_{2A}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\lambda}\left(T_{1A} - T_{2A}\right)$$

Avec $\lambda = \dfrac{Dc}{G}$. On intègre alors avec $T_2(0) = T_{2A}$:

$$T_2(x) = T_{2A} - \left(\frac{T_{1A} - T_{2A}}{\lambda}\right)x$$

Il reste à appliquer cette relation en $x = L$:

$$T_{2B} = T_{2A} - \left(\frac{T_{1A} - T_{2A}}{\lambda}\right)L \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{2A} = \frac{T_{2B} + \dfrac{L}{\lambda}T_{1A}}{1 + \dfrac{L}{\lambda}}}$$

3. On pose $u = \dfrac{LG}{Dc} = L/\lambda$.

$\rightarrow u \gg 1$ correspond à des échanges thermiques efficaces (« grande » longueur, coefficient d'échange G « élevé », écoulement lent, « faible » capacité thermique), on constate alors une efficacité maximale :

$$T_{2A} \rightarrow T_{1A}$$

$\rightarrow u \ll 1$, $T_{2A} \rightarrow T_{2B}$, l'échangeur est inefficace.

Bilan004. Pompage d'un bac dans un autre (**)

1. Dans un premier temps, on ne tient pas compte des pertes de charge.
Appliquons un premier principe industriel, pour le fluide qui s'écoule entre l'amont assimilé à l'eau au contact de l'air dans le premier bassin et l'aval assimilé à l'eau au contact de l'air dans le second réservoir :

$$\rho \times Q \times \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_{meca}^{utile} + \mathcal{P}_{th}$$

avec $\Delta(h + e_c + e_p) = h_2 - h_1 + e_{c2} - e_{c1} + e_{p2} - e_{p1} = g\Delta z$.

Pour obtenir ce résultat, on a supposé que l'énergie cinétique du fluide était nulle à la surface des réservoirs (réservoirs de grande section). L'enthalpie massique peut s'écrire : $h = u + P/\rho$. Les réservoirs étant à l'air libre, les pressions sont identiques. De plus l'énergie interne massique est une fonction, *a priori* de T et du volume massique ; pour un fluide incompressible, le volume massique ne change pas et si on néglige la perte de charge, on peut supposer que la température ne varie pas (pas de dissipation au sein du fluide) ; au final, l'enthalpie massique est la même en amont et en aval.

En l'absence de pertes de charge, le terme de droite s'identifie à la puissance mécanique qui est celle de la pompe, on en déduit :

$$\rho Q g \Delta z = \mathcal{P}_{pompe}$$

Il ne reste plus qu'à prendre en compte les pertes de charge qui sont équivalentes à une hauteur d'eau sur laquelle le fluide doit être remonté, compte tenu de la formule précédente, on en déduit :

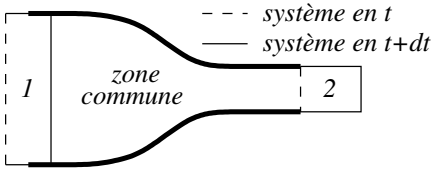
$$\boxed{\mathcal{P}_{pompe} = \rho Q g \left(\Delta z + h_v\right)}$$

2. Application numérique :

$$\mathcal{P}_{pompe} = 1,0 \times 10^3 \times 5,0 \times 10^{-3} \times 9,81 \times 25 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{pompe} = 1,2 \text{ kW}}$$

Bilan067. Effort sur une lance à incendie (**)

On considère le système compris à l'instant t dans la zone en pointillé et à l'instant $t + \mathrm{d}t$ dans la zone en trait plein. On effectue un bilan de quantité de mouvement en projection sur l'axe Ox.



$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}_{ext}\mathrm{d}t = \left[\vec{F}_{\text{lance}\to\text{eau}} + \vec{F}_{\text{pression}}\right]\mathrm{d}t$$

On commence par évaluer le membre de gauche en régime permanent, avec ρ_0 la masse volumique de l'eau :

$$\mathrm{d}\vec{p} = \delta\vec{p}_2 - \delta\vec{p}_1 = \delta m \times (v_2 - v_1)\,\vec{u}_x = \rho_0 Q \mathrm{d}t\,(v_2 - v_1)\,\vec{u}_x$$

Il reste à évaluer les force de pression :

$$\vec{F}_{\text{pression}} = \left[P_1 \times \frac{\pi D_1^2}{4} - P_2 \times \frac{\pi D_2^2}{4}\right]\vec{u}_x$$

En sortie le fluide est à l'air libre : $P_2 = P_0$. On détermine la pression d'entrée à l'aide de la relation de Bernoulli :

$$P_0 + \frac{\rho_0 v_2^2}{2} = P_1 + \frac{\rho_0 v_1^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad P_1 = P_0 + \frac{\rho_0 v_2^2}{2} - \frac{\rho_0 v_1^2}{2}$$

On en déduit :

$$\rho_0 Q\,(v_2 - v_1)\,\vec{u}_x = \vec{F}_{\text{lance}\to\text{eau}} + \frac{\pi P_0}{4}\left(D_1^2 - D_2^2\right)\vec{u}_x + \frac{\pi\rho_0 D_1^2}{8} \times \left(v_2^2 - v_1^2\right)\vec{u}_x$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{eau}\to\text{lance}} = \left[-\rho_0 Q\,(v_2 - v_1) + \frac{\pi P_0}{4}\left(D_1^2 - D_2^2\right) + \frac{\pi\rho_0 D_1^2}{8} \times \left(v_2^2 - v_1^2\right)\right]\vec{u}_x}$$

Application numérique avec $Q = 40 \times 10^{-3}$ m$^3 \cdot$ s^{-1},

$v_2 = \dfrac{4Q}{\pi D_2^2} = 5,1$ m $\cdot$ s^{-1}, $v_1 = \dfrac{4Q}{\pi D_1^2} = 1,3$ m $\cdot$ s^{-1} on en déduit :

$$\boxed{\|\vec{F}_{\text{eau}\to\text{lance}}\| = 2,6 \text{ kN}}$$

Bilan048. Étude d'un écoulement (***)

1. Pour un écoulement incompressible et homogène, $\mathrm{div}\,(\vec{u}) = 0$. Le champ des vitesses ne comportant qu'une unique composante selon Ox, on en déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

En conclusion $\boxed{u(x,z) = u(z)}$.

2. Le fluide étant en écoulement stationnaire, une couche de fluide d'épaisseur $\mathrm{d}z$ vérifie le principe d'inertie. Les forces s'exerçant sur le fluide, forces de pression $\delta\vec{F}_p$, forces de viscosité $\delta\vec{F}_v$ et le poids se compensent :

$$\delta\vec{F}_p(z) + \delta\vec{F}_p(z + dz) + \delta m\vec{g} + \delta\vec{F}_v(z) + \delta\vec{F}_v(z + dz) = \vec{0}$$

On projette selon le vecteur $\vec{e}_z$:

$$P(z)\mathrm{d}S - P(z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}S - \mu g\cos(\theta)\mathrm{d}S\mathrm{d}z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu g\cos(\theta)$$

$P(z) = -\mu g\cos(\theta)z + cste$, avec la condition aux limites $P(h) = P_0$, on en déduit :

$$\boxed{P(z) = P_0 - \mu g\cos(\theta)\,(z - h)}$$

3. On projette l'équilibre des forces selon $\vec{e}_x$:

$$-\eta\frac{\partial u}{\partial z}(z)\mathrm{d}S+\eta\frac{\partial u}{\partial z}(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}S+\mu g\sin(\theta)\mathrm{d}S\mathrm{d}z=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{g\sin(\theta)}{\nu}}$$

On en déduit :

$$\boxed{u(z)=-\frac{g\sin(\theta)}{\nu}\frac{z^2}{2}+Az+B}$$

4. Pour un fluide visqueux, la vitesse doit s'annuler au contact du solide fixe $\boxed{u(0)=0}$.

5. $u(0)=0$ donne $B=0$ et $u'(h)=-\dfrac{g\sin(\theta)}{\nu}h+A=0$, on obtient :

$$\boxed{u(z)=-\frac{g\sin(\theta)}{\nu}\frac{z^2}{2}+\frac{g\sin(\theta)}{\nu}hz}$$

6. On exprime alors le débit volumique sur la section droite de l'écoulement :

$$q=\iint\vec{u}.d\vec{S}=\frac{g\sin(\theta)}{\nu}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{h}\left(-\frac{z^2}{2}+hz\right)dz=\frac{bg\sin(\theta)}{\nu}\left[-\frac{z^3}{6}+\frac{hz^2}{2}\right]_0^h$$

$$\boxed{q=\frac{g\sin(\theta)\times h^3b}{3\nu}}$$

Bilan026. Microcentrale hydraulique (***)

1. Calculons le nombre de Reynolds dans la première conduite :

$$\mathcal{R}_e=\frac{U_a\rho D_a}{\eta}=\frac{1,2\times1,0\times10^3\times0,30}{10^{-3}}=3,6\times10^5\gg1$$

Le régime est turbulent, la loi de Hagen-Poiseuille ne s'applique pas, on ne peut donc pas calculer les pertes de charge à l'aide de cette formule.

2. Débit volumique :

$$D_{va}=U_a\times\frac{\pi D_a^2}{4}=1,2\times\frac{\pi\times0,30^2}{4}\quad\Rightarrow\quad\boxed{D_{va}=85\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}}$$

$$D_{vb}=U_b\times\frac{\pi D_b^2}{4}=2,7\times\frac{\pi\times0,20^2}{4}\quad\Rightarrow\quad\boxed{D_{vb}=85\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}}$$

Pour cet écoulement incompressible et homogène, le débit volumique est nécessairement le même en tout point de l'écoulement.

3. Dans une version idéalisée, l'énergie potentielle de l'eau est totalement convertie en énergie mécanique disponible pour la turbine.

Pendant $\mathrm{d}t$, une masse δm quitte le sommet du réservoir et la même masse sort au niveau de la turbine, correspondant à une variation d'énergie potentielle $\delta m\times g(z_h-z_0)$ et donc une puissance disponible :

$$\mathcal{P}_{max}=\frac{\delta m\times g(z_h-z_0)}{\mathrm{d}t}=D_mg\,(z_h-z_0)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\mathcal{P}_{max}=\rho D_vg(z_h-z_0)}$$

Application numérique :

$$\mathcal{P}_{max}=1,0\times10^3\times0,085\times9,8\times89\quad\Rightarrow\quad\boxed{\mathcal{P}_{max}=74\ \mathrm{kW}}$$

4. Niveaux d'eau :

(a) Il y a trois pertes de charge : deux singulières au niveau de la grille et du rétrécissement et une régulière le long de la première conduite.

$$P_1+\mu gz_1+\frac{\mu v_1^2}{2}=P_2+\mu gz_2+\frac{\mu v_2^2}{2}+\xi_g\times\frac{1}{2}\mu U_a^2+\xi_r\frac{1}{2}\mu U_b^2+\lambda_a\times\frac{\mu U_a^2}{2}\frac{L_a}{D_a}$$

$z_1=z_h$, v_1 négligeable (la surface de la retenue étant très supérieure à la section du tuyau), et $v_2=U_b$.

$$\boxed{P_1=P_2+\mu g(z_2-z_h)+\mu\frac{U_a^2}{2}\left(\xi_g+\lambda_a\frac{L_a}{D_a}\right)+\frac{\mu U_b^2}{2}(1+\xi_r)}$$

(b) Par continuité la pression en bas de la cheminée est la pression P_2 ; au sein de la cheminée, on peut appliquer la loi de l'hydrostatique :

$$\boxed{P_2=P_3+\mu\times g\,(z_{ch}-z_2)}$$

(c) La comparaison des deux expressions conduit à :

$$P_1=P_3+\mu g(z_{ch}-z_h)+\mu\frac{U_a^2}{2}\left(\xi_g+\lambda_a\frac{L_a}{D_a}\right)+\frac{\mu U_b^2}{2}(1+\xi_r)$$

La retenue d'eau et la cheminée débouchent à l'air libre : $P_1=P_3=P_0$, en conséquence :

$$\boxed{z_h-z_{ch}=\frac{U_a^2}{2g}\left(\xi_g+\lambda_a\frac{L_a}{D_a}\right)+\frac{U_b^2}{2g}(1+\xi_r)}$$

Application numérique :

$$z_h-z_{ch}=\frac{1,2^2}{2\times9,8}\left(1,75+0,015\times\frac{60}{0,30}\right)+\frac{2,7^2}{2\times9,8}\times(1+0,079)$$

$$\boxed{z_h-z_{ch}=0,75\ \mathrm{cm}}$$

5. Puissance récupérable :

(a) On applique le premier principe industriel au fluide qui traverse la turbine :

$$D_m\times\Delta(h+e_c+e_p)=P_u$$

P_u représente la puissance fournie par la turbine au fluide.

Les sections d'entrée et de sortie de la turbine sont identiques de diamètre D_b, la conservation du débit volumique entraîne la conservation de la vitesse moyenne et donc de l'énergie cinétique. Il n'y a pas non plus de variation d'énergie potentielle.

La variation d'enthalpie massique s'identifie à la différence entre les enthalpies en sortie et en entrée. En l'absence de dissipation :

$$\Delta h = h_s - h_e = \left(u_s + \frac{P_s}{\mu}\right) - \left(u_e + \frac{P_e}{\mu}\right) = \frac{P_s - P_e}{\mu} = \frac{P_5 - P_4}{\mu}$$

On en déduit :

$$P_u = \frac{D_m}{\mu}\left(P_5 - P_4\right) = D_v\left(P_5 - P_4\right)$$

La turbine reçoit une puissance opposée, compte tenu du rendement de la turbine, on en déduit, pour la puissance mécanique récupérable :

$$\boxed{\mathcal{P} = \eta_t D_v\left(P_4 - P_5\right)}$$

(b) On peut exprimer P_4 en fonction de P_1, de la même façon que l'on a exprimé P_2 en fonction de P_1 en tenant compte des pertes de charge singulière au niveau des coudes et de la perte de charge dans la seconde conduite :

$$\boxed{P_1 = P_4 + \mu g(z_0 - z_h) + \mu\frac{U_a^2}{2}\left(\xi_g + \lambda_a\frac{L_a}{D_a}\right) + \frac{\mu U_b^2}{2}\left(1 + \xi_r + \xi_1 + \xi_2 + \lambda_b\frac{L_b}{D_b}\right)}$$

Dans le diffuseur, le retour au diamètre de la première conduite fait que la vitesse passe de U_b à U_a. En sortie la pression est la pression atmosphérique. La relation de Bernoulli généralisée s'écrit alors.

$$\boxed{P_5 + \frac{\mu U_b^2}{2} = P_0 + \frac{\mu U_a^2}{2} + \xi_d \times \frac{1}{2}\mu U_b^2}$$

(c) Le sommet de la retenue est à l'air ambiant $P_1 = P_0$, la comparaison des deux dernières expressions conduit à :

$$P_4 - P_5 = \mu g\left(z_h - z_0\right) - \frac{\mu U_a^2}{2}\left(1 + \xi_g + \lambda_a\frac{L_a}{D_a}\right) - \frac{\mu U_b^2}{2}\left(\xi_d + \xi_r + \xi_1 + \xi_2 + \lambda_b\frac{L_b}{D_b}\right)$$

Application numérique : $P_4 - P_5 = 8,38 \times 10^5$ Pa.
Au final, pour une hauteur de 89 m, on constate que la perte de charge ne représente qu'une faible perte de l'ordre de 5 m.

On peut alors évaluer la puissance récupérable :

$$\mathcal{P} = 0,82 \times 0,085 \times 8,38 \times 10^5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = 58 \text{ kW}}$$

Le rendement de la turbine est responsable de l'essentiel des pertes.

Bilan027. Ressaut hydraulique

1. En amont et aval, l'écoulement est uniforme et on peut appliquer la loi de la statique des fluides :

$$\boxed{P_1 = P_0 + \mu g(h_1 - z)} \quad \text{et} \quad \boxed{P_2 = P_0 + \mu g(h_2 - z)}$$

2. On considère le système fermé contenu à l'instant t dans la surface de contrôle auquel on ajoute l'eau qui s'apprête à entrer dans la surface de contrôle pendant $\mathrm{d}t$. Le théorème de la quantité de mouvement, projeté selon (Ox), conduit à :

$$p_x(t + \mathrm{d}t) - p_x(t) = F_x \mathrm{d}t$$

En régime permanent, la variation de quantité de mouvement s'identifie aux différences entre la sortie et l'entrée du système :

$$p_x(t + \mathrm{d}t) - p_x(t) = \delta p_{2x} - \delta p_{1x} = \delta m_2 v_2 - \delta m_1 v_1$$

En régime permanent, il y a conservation du débit massique $\delta m_1 = \delta m_2$:

$$\delta p_{2x} - \delta p_{1x} = \delta m_1(v_2 - v_1) = \mu v_1 \mathrm{d}t L h_1(v_2 - v_1)$$

Les forces horizontales qui s'exercent sur le système se limitent aux forces de pression en amont et en aval. La surface de contrôle ayant la même section en amont et en aval, le terme lié à la pression P_0 se simplifie et on peut ne tenir compte que de la surpression :

$$F_x = L\int_0^{h_1} \mu g(h_1 - z)\mathrm{d}z - L\int_0^{h_2} \mu g(h_2 - z)\mathrm{d}z$$

$$\Leftrightarrow \quad F_x = L\mu g\left[h_1^2 - \frac{h_1^2}{2} - h_2^2 + \frac{h_2^2}{2}\right] = L\mu g\frac{h_1^2 - h_2^2}{2}$$

La comparaison des deux expressions conduit finalement à :

$$\boxed{h_1 v_1(v_2 - v_1) = g\frac{h_1^2 - h_2^2}{2}}$$

3. Pour cet écoulement incompressible et homogène, la conservation du débit volumique impose : $h_1 v_1 = h_2 v_2$. En couplant à la relation précédemment obtenue, on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui admet pour solution :

$$\boxed{v_1^2 = \frac{g}{2}(h_1 + h_2)\frac{h_2}{h_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_2^2 = \frac{g}{2}(h_1 + h_2)\frac{h_1}{h_2}}$$

4. On considère le même système qu'à la première question, et on applique le théorème de la puissance mécanique :

$$\mathrm{d}(E_c + E_p) = E_c(t + \mathrm{d}t) - E_c(t) + E_p(t + \mathrm{d}t) - E_p(t) = \left(\mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{\text{non conser.}}\right)\mathrm{d}t$$

En régime permanent, les variations d'énergie cinétique et potentielle s'identifient aux différences entre la sortie et l'entrée. Pour l'énergie potentielle, on remarque que le centre de masse se trouve respectivement en $z = h_1/2$ et $z = h_2/2$:

$$\mathrm{d}(E_c + E_p) = \frac{1}{2}\delta m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\delta m_1 v_1^2 + \delta m_2 g\frac{h_2}{2} - \delta m_1 g\frac{h_1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(E_c + E_p) = \frac{1}{2}\mu D_v \mathrm{d}t\left(v_2^2 - v_1^2 + gh_2 - gh_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(E_c+E_p)=\frac{1}{2}\mu D_v\mathrm{d}t\left(\frac{g}{2}(h_1+h_2)\times\frac{h_1}{h_2}-\frac{g}{2}(h_1+h_2)\times\frac{h_2}{h_1}+gh_2-gh_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(E_c+E_p)=\frac{1}{4}\mu g D_v\mathrm{d}t\left[(h_1+h_2)\times\frac{h_1}{h_2}-(h_1+h_2)\times\frac{h_2}{h_1}+2h_2-2h_1\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(E_c+E_p)=\frac{\mu g D_v\mathrm{d}t}{4h_1h_2}\left[(h_1+h_2)h_1^2-(h_1+h_2)h_2^2+2h_1h_2^2-2h_1^2h_2\right]$$

Les forces non conservatives s'identifient aux forces de pression en amont et en aval, la pression est le produit de la force par la vitesse, en amont il n'est donc pas nécessaire de tenir compte de la partie associée à l'air qui ne se déplace pas.

$$\mathcal{P}^{pression}=\int_{z=0}^{h_1}\int_{y=0}^{L}P_1(z)v_1\mathrm{d}z\mathrm{d}y-\int_{z=0}^{h_2}\int_{y=0}^{L}P_2(z)v_2\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$\mathcal{P}^{pression}=Lv_1\times\left[P_0h_1+\mu g\frac{h_1^2}{2}\right]-Lv_2\times\left[P_0h_2+\mu g\frac{h_2^2}{2}\right]$$

La conservation du débit volumique $D_v=Lv_1h_1=Lv_2h_2$ entraîne la simplification des termes en P_0 et finalement :

$$\mathcal{P}^{pression}=\mu gL\left[\frac{h_1^2v_1}{2}-\frac{h_2^2v_2}{2}\right]=\frac{\mu gD_v}{4}(2h_1-2h_2)=\frac{\mu gD_v}{4h_1h_2}(2h_1^2h_2-2h_1h_2^2)$$

En reprenant le théorème de la puissance mécanique, on en déduit :

$$\mathcal{P}_{int}=\frac{\mu gD_v}{4h_1h_2}\left[(h_1+h_2)h_1^2-(h_1+h_2)h_2^2+2h_1h_2^2-2h_1^2h_2-2h_1^2h_2+2h_1h_2^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_{int}=\frac{\mu gD_v}{4h_1h_2}\left[h_1^3+h_2h_1^2-h_1h_2^2-h_2^3+2h_1h_2^2-2h_1^2h_2-2h_1^2h_2+2h_1h_2^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_{int}=-\frac{\mu gD_v}{4h_1h_2}(h_2-h_1)^3$$

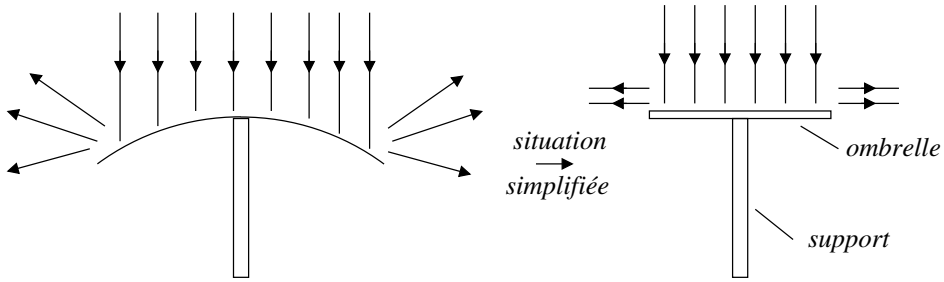
Cette puissance intérieure est négative et correspond à une baisse de l'énergie mécanique du système ; la puissance dissipée lors du ressort est donc égale à :

$$\boxed{\mathcal{P}=\frac{\mu gD_v}{4h_1h_2}(h_2-h_1)^3}$$

Bilan072. Force sur un parapluie (***)

Modélisation et idées physiques

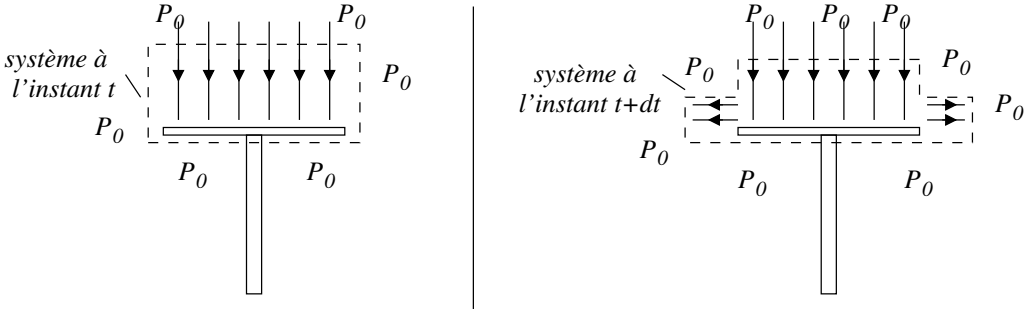
On considère que l'eau arrive verticalement sur le parapluie et s'évacue par les côtés.



On peut alors décomposer le problème en deux parties :
- déterminer l'action de l'eau sur le parapluie en fonction du débit et de la vitesse des gouttes d'eau ;
- déterminer la vitesse des gouttes d'eau arrivant sur le parapluie.

Mise en équations

On considère comme système {l'ombrelle + la zone de pluie isolée et représentée à l'instant t} et on se place en régime permanent.



Le théorème de la résultante cinétique conduit à $\mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}_{ext}\mathrm{d}t$.
En indiçant avec e les grandeurs en amont de la surface de contrôle et s en aval, le régime stationnaire permet d'affirmer :

$$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)=\underbrace{\delta\vec{p}_s}_{=0}-\delta\vec{p}_e=-\delta m\times\vec{v}_e$$

avec δm la masse d'eau qui entre et sort de la surface de contrôle (surface commune au système en t et $t+\mathrm{d}t$) pendant $\mathrm{d}t$. $\delta\vec{p}_s$ est nécessairement nul par symétrie et $\vec{v}_e$ est la vitesse des gouttes d'eau qui arrivent sur le parapluie.

Sur le système considéré, les forces qui s'appliquent sont :
- la résultante des forces de pression $\vec{F}_{\text{pression}}=\vec{0}$, car la pression est uniforme sur la surface fermée ;
- la force du support sur « l'ombrelle » $\vec{F}_{s\to o}$;

— le poids de l'ombrelle $\vec{P}_{omb.}$.

Le théorème de la résultante cinétique conduit alors à, avec D_m le débit massique d'eau :

$$-\delta m\vec{v}_e = \left[\vec{F}_{s\to o} + \vec{P}_{omb.}\right] \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{s\to o} = -D_m\vec{v}_e - \vec{P}_{omb.}$$

Le terme $D_m\vec{v}_e$ est donc le terme qui s'ajoute et que l'on doit supporter en plus en présence de la pluie, en conséquence :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{eau}\to\text{parapluie}} = D_m\vec{v}_e}$$

Déterminons maintenant v_e. Une goutte de pluie chute sous l'effet de son poids et atteint une vitesse limite du fait des frottements (la poussée d'Archimède est négligeable $\rho_{air} \ll \rho_{eau}$).

Si la vitesse est inconnue à ce stade, on peut sans doute l'estimer à quelques mètres par seconde, disons $v_e \approx 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et considérer une goutte de diamètre $d \approx 2$ mm , ce qui donne pour le nombre de Reynolds :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho_{air}\times d\times v_e}{\eta_{air}} \approx \frac{1,2\times 2\times 10^{-3}\times 10}{2\times 10^{-5}} \approx 1\times 10^3 \gg 1$$

On considère alors un modèle de traînée quadratique (la loi de Stokes ne s'appliquant réellement que pour $\mathcal{R}_e \leq 10$). Une fois le régime inertiel atteint, les forces s'équilibrent :

$$mg = \frac{1}{2}C_x\rho_{air}Sv_e^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{eau}\times\frac{4\pi r^3}{3}g = \frac{1}{2}C_x\rho_{air}\times\pi r^2\times v_e^2$$

On en déduit : $v_e^2 = \dfrac{\rho_{eau}}{\rho_{air}}\times\dfrac{8}{3}\times\dfrac{gr}{C_x}$; avec $C_x \approx 1$, on obtient :

$$v_e^2 = \frac{1,0\times 10^3}{1,2}\times\frac{8}{3}\times\frac{9,8\times 1,0\times 10^{-3}}{1} \approx 22\ \mathrm{m^2\cdot s^{-2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_e \approx 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

Pour estimer le débit, on pourrait considérer la montée de l'eau au sein d'un seau au cours du temps ; à défaut une recherche rapide indique qu'une forte pluie correspond à une montée $\dot{h} \approx 8\ \mathrm{mm\cdot h^{-1}}$. Compte tenu de la section $S = \pi\dfrac{D^2}{4}$ du parapluie (avec $D \approx 1$ m le diamètre du parapluie), on en déduit le débit massique $D_m = \rho_e \times S \times \dot{h}$:

$$D_m = 1,0\times 10^3\times\frac{\pi\times 1^2}{4}\times 8\times 10^{-3} \approx 6,3\ \mathrm{kg\cdot h^{-1}} \approx 1,7\times 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$$

Et donc pour la force :

$$\|\vec{F}\| = 1,7\times 10^{-3}\times 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|\vec{F}\| \approx 10^{-2}\ \mathrm{N}}$$

Analyse du résultat

La force est négligeable devant le poids du parapluie. Même en considérant une pluie plus intense, on peut penser que le vent aura un effet beaucoup plus important que la pluie sur le parapluie.