

Feuille de TD 4

Exercice 1 : Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1)

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 2 : Soit $V := \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et une base.

b) Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice 3 : Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & 1+x_2y_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1+x_{n-1}y_{n-1} & x_ny_{n-1} \\ x_1y_n & & \cdots & x_{n-1}y_n & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$. Calculer ce déterminant de taille $(p+1, p+1)$:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$$

Exercice 5 : Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Soit $x \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & a_0 \\ -1 & x & & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercices supplémentaires :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\tilde{A}$ la comatrice de A .

a) Donner le rang de $\tilde{A}$ en fonction du rang de A .

b) Pour $n \geq 3$ résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $A = \tilde{A}$.

Déterminant de Cauchy : Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout (i, j) , $(a_i + b_j) \neq 0$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$