

Devoir libre 05

2TSI. Mathématiques

À rendre le 08 décembre 2017 au plus tard

L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice (avec Python)

Posé à l'oral de CCS en Maths II en 2017

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis par :

$$P_0 = 1, P_1 = 2X \text{ et } \forall n \geq 1, P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

1. Avec Python, calculer P_n pour n variant de 2 à 8.
2. Conjecturer le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n . Justifier ces résultats.
3. On pose : $\langle P, Q \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P(t) Q(t) dt$, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.
 - (a) Calculer à la main $\langle P_0, P_0 \rangle$, $\langle P_0, P_1 \rangle$ et $\langle P_1, P_1 \rangle$.
 - (b) Rappeler la méthode des trapèzes pour déterminer numériquement une intégrale définie. Proposer un programme en langage Python.
 - (c) Avec la procédure Python écrite à la question précédente, calculer $\langle P_i, P_j \rangle$ pour i et j variant de 0 à 8. Que remarque t-on ?

Problème

Posé au Concours National Marocain, épreuve de Math I, filière TSI en 2017

On note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on considère la fonction ϕ_t définie sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \phi_t(x) = \frac{e^{-t}}{1 + x^2 t^2}.$$

De plus, on considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \phi_t(x) dt$.

Partie A

Cette partie est le calcul de la somme de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$.
2. Soit $x \in]0, \pi]$.

$$(a) \text{ Montrer : } \forall n \in \mathbb{N}^*, e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}.$$

$$(b) \text{ En déduire que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \Psi(x) \sin(mx) dx = 0.$$

T.S.V.P →

4. Soit g définie sur $[0, \pi]$ par : $x \mapsto \begin{cases} \frac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2 \sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right) dx$.

6. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Partie B

1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbf{R}$. Étudier la parité de f .
2. On désire étudier la continuité de f .
 - (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, ϕ_t est dérivable (par rapport à x) sur $\mathbf{R}_+$ et que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|\phi'_t(x)| \leq te^{-t}$.
 - (b) En déduire : $\forall (t, x) \in (\mathbf{R}_+)^2, \forall h \in \mathbf{R}^*$ avec $x + h \geq 0$, $\left| \frac{e^{-t}}{1 + (x+h)^2 t^2} - \frac{e^{-t}}{1 + x^2 t^2} \right| \leq |h|te^{-t}$.
 - (c) En déduire que f est continue sur $\mathbf{R}$.
3. Déterminer la monotonie de f sur $\mathbf{R}$.
4. Montrer que, pour tout réel strictement positif x , $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1 + u^2} du$.
Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5. On étudie la nature de l'intégrale généralisée : $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.
 - (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+, e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan(\sqrt{x}) \leq \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1 + u^2} du \leq \arctan(\sqrt{x})$.
 - (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1 + u^2} du$.
 - (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+, 0 \leq \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1 + u^2} du \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})$.
 - (d) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1 + u^2} du$.
 - (e) Donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.
 - (f) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est divergente.

Partie C

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$.
 - (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq 1 + \int_0^n f(t) dt$.
 - (b) En déduire que $\sum_{n \geq 0} f(n)$ est une série divergente.
 - (c) En déduire que S_n est équivalente à $\int_0^n f(t) dt$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \int_0^{+\infty} \phi_1(n^2 x) dx$.
Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente et calculer sa valeur.