Devoir Maison n°8
Correction

Exercice 1

– Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(t) = \ln t$. Il est clair que φ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi φ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^*$.
– Posons $x = \varphi(t) = \ln t$, on a donc $z(x) = z(\varphi(t)) = z(\ln t) = y(t)$.
– On a $y'(t) = \dfrac{1}{t} z'(x)$ et $y''(t) = \dfrac{1}{t^2} z''(x) - \dfrac{1}{t^2} z'(x)$. En reportant ces résultats dans $(\mathcal{E})$, on obtient :

$$(\mathcal{E}') \ : \ z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 0.$$

– Le polynôme caractéristique de $(\mathcal{E}')$ est $r^2 + 2r + 1$ dont -1 est racine double. La solution de $(\mathcal{E}')$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(x) = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{-x}, \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

– On conclut que la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est définie par :

$$y(t) = C_1 \frac{\ln t}{t} + C_2 \frac{1}{t}, \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2

On peut écrire $Y' = AY$ avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

On a $\chi_A(X) = \det(X\mathrm{I}_3 - A) = (X^2-1)(X-3) = (X-1)(X+1)(X-3)$. La matrice A est donc diagonalisable, puisque son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
− Cherchons une base de vecteurs propres de A.
On vérifie que $(A+\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$. Donc $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre -1.
De même $(A-\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x-y-z = & 0 \\ -2x+y+2z = & 0 \end{cases}$. Donc $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la v. p. 1.
Enfin $(A-3\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y-z = & 0 \\ -x+z = & 0 \end{cases}$. Donc $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la v.p. 3.

La famille (U, V, W) est donc une base de diagonalisation de A.

En conclusion, la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ vérifie $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

− En remplaçant A par PDP^{-1}, dans l'équation $Y' = AY$, on obtient $Y' = PDP^{-1}Y$, puis on en déduit $(P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y)$.
Posons $Z = P^{-1}Y = Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, il vient $Z' = DZ$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ y_1' = y_1 \\ z_1' = 3z_1 \end{cases}$.

La solution générale du dernier système différentiel est :

$$Z(t)=\begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{-t} \\ C_2\mathrm{e}^{t} \\ C_3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix},\ \text{avec}\ (C_1,C_2,C_2)\in\mathbb{R}^3.$$

Comme $Y = P \times Z$, on obtient :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} C_2\mathrm{e}^{t} + C_3\mathrm{e}^{3t} \\ C_1\mathrm{e}^{-t} - C_3\mathrm{e}^{3t} \\ -C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{t} + C_3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. On vérifie sans peine que $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme cette fonction φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, nous appliquerons la méthode de variation d'une constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En reportant $y(t) = \dfrac{\lambda(t)}{t^2}$ et ses dérivées successives dans $(\mathcal{E})$, on obtient :

$$\lambda''(t) = \ln t.$$

• On en déduit, par primitivation :

$$\lambda'(t) = t\ln t - t + C_1,\ \text{avec}\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Puis, par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int t\ln t\,\mathrm{d}t &= \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lambda(t) = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{3t^2}{4} + C_1 t + C_2,$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

• La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrit donc :

$$y : t \mapsto \frac{1}{2}\ln t - \frac{3}{4} + C_1\frac{1}{t} + C_2\frac{1}{t^2},$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.