

Devoir Maison n°11

Correction

1. a. • (D_1) est contenue dans le plan d'équation $z = \frac{\pi}{4}$, donc elle est parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

De plus, pour $\alpha = 0$, on obtient le point $A_0(0, 0, \frac{\pi}{4}) \in (D_1) \cap (Oz)$, donc (D_1) vérifie la propriété (P1).

Si $M(x, y, z) \in (D_1) \cap (C)$, alors on a :

$$\begin{cases} x = \cos t = \alpha \\ y = \sin t = \alpha \\ z = t = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \in (D_1) \cap (C),$$

donc (D_1) vérifie la propriété (P2).

- (D_2) est contenue dans le plan d'équation $z = \frac{\pi}{4}$, donc elle est parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

De plus, pour $\alpha = 0$, on obtient encore le point $A_0(0, 0, \frac{\pi}{4}) \in (D_2) \cap (Oz)$, donc (D_2) vérifie également la propriété (P1).

Si $M(x, y, z) \in (D_2) \cap (C)$, alors on a :

$$\begin{cases} x = \cos t = \alpha \\ y = \sin t = -\alpha \\ z = t = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} : \text{absurde,}$$

donc (D_2) ne vérifie pas la propriété (P2).

- b. Si une droite vérifie les propriétés (P1) et (P2), alors elle passe par un point $A(\cos t, \sin t, t)$ de la courbe (C) . Notons (D_t) une telle droite.

Comme, de plus, cette droite est contenue dans un plan parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors elle est contenue dans le plan d'équation $z = t$ et elle coupe donc la droite (Oz) au point $A'(0, 0, t)$.

On en déduit alors que (D_t) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ et qu'elle admet la représentation paramétrique suivante :

$$(D_t) : \begin{cases} x(\gamma) = \cos t + \gamma \cos t \\ y(\gamma) = \sin t + \gamma \sin t \\ z(\gamma) = t \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

2. a. Il suffit de remarquer que la surface (S) est l'union des droites (D_t) , puis de poser $u = t$ et $v = 1 + \gamma$ pour vérifier que (S) admet pour représentation paramétrique :

$$(S) : \begin{cases} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = u \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- b. L'application $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & \begin{pmatrix} x(u, v) = v \cos u \\ y(u, v) = v \sin u \\ z(u, v) = u \end{pmatrix} \end{matrix}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme nous avons :

$$\begin{pmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

on en déduit que tous les points de (S) sont réguliers.

- 3. a.** Il suffit donc de vérifier que $A_1 \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ est un point de (S) . Pour cela, on résout :

$$\begin{cases} v \cos u = 1 \\ v \sin u = 1 \\ u = \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

ce qui nous donne $u = \frac{\pi}{4}$ et $v = \sqrt{2}$.

- b.** La génératrice Γ_{A_1} de (S) passant par le point A_1 est obtenue pour $u = \frac{\pi}{4}$:

$$\Gamma_{A_1} : \begin{cases} x(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ y(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ z(v) = \frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $\Gamma_{A_1} = (D_1)$.

- c.** Notons Π_{A_1} le plan tangent à (S) au point A_1 . On trouve :

$$\Pi_{A_1} : \begin{vmatrix} x-1 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y-1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z-\frac{\pi}{4} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

- d.** Le deuxième point ayant une de ses coordonnées nulle sur cette génératrice est obtenu pour $v = 0$, on trouve $B \left(0, 0, \frac{\pi}{4}\right) \in \Gamma_{A_1}$.

Le plan tangent Π_B à (S) en B admet pour équation :

$$\Pi_B : \begin{vmatrix} x & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z-\frac{\pi}{4} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

On en déduit que le plan tangent varie quand on se déplace sur cette directrice, ce que l'on pouvait prévoir car le vecteur $\vec{n}(u, v)$ normal à (S) au point de paramètres (u, v) est défini par :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = \vec{n}(u, v) \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix},$$

et l'on voit que la dernière coordonnée de ce vecteur dépend de v .

- 4.** Soit M un point de (C) .

- a.** Si $M \in (C)$, alors $M \in (S)$, car il correspond au point de paramètres $u = t$ et $v = 1$.

L'application $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) = \cos t \\ y(t) = t \sin t \\ z(t) = t \end{pmatrix} \end{matrix}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme nous avons :

$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

on en déduit que tous les points de (C) sont biréguliers.

b. Le plan osculateur P_M admet pour équation :

$$P_M : \begin{vmatrix} x - \cos t & -\sin t & -\cos t \\ y - \sin t & \cos t & -\sin t \\ z - t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \sin t - y \cos t + z - t = 0.$$

Le plan osculateur est donc le plan passant par M et de vecteur normal $\vec{\nu}(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$, il est donc égal au

plan tangent à (S) en M qui est normal au vecteur $\vec{n}(t, 1) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{\nu}(t)$.