

Math. - CC 2 - S1 - Analyse

vendredi 25 novembre 2016 - Durée 1 h 30

*Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.***Exercice 1**

On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$$

1. Montrer que l'intégrale I converge.
2. Montrer que :

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \frac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1$$

3. Montrer que $\forall x \in]0, 1[, \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt$ converge et, à l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

4. Dédire des questions précédentes un encadrement de $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt$, puis déterminer I .

Exercice 2On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$.On note R son rayon de convergence, et $S(x)$ sa somme lorsque la série converge.

- 1a. Déterminer R .
- b. Préciser le comportement de la série aux bornes de son intervalle de convergence.
- 2a. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ en 0, ainsi que son rayon de convergence.
- b. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$, sur un intervalle à préciser.
- 3a. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$$

- b. Expliciter $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
- c. Vérifier que S est continue en 0.
- 4a. En utilisant la décomposition en éléments simples établie à la question 3.a, calculer les sommes des séries numériques $S(1)$ et $S(-1)$.
- b. En déduire que S est continue en -1 et 1 .

Fin de l'énoncé d'analyse