

D.S. 5 (4 heures)

Problème A : maximum d'une forme linéaire sur $O_n(\mathbb{R})$

Dans tout le problème n est un entier naturel au moins égal à 2.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

$O_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe orthogonal d'ordre n et f_n l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f_n(M) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_{i,j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \right).$$

On désigne par $\|\cdot\|$ la norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\|M\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|.$$

$(d_1, \dots, d_n)$ étant un élément de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ la matrice diagonale dont la diagonale est $(d_1, \dots, d_n)$.

Résultats préliminaires

- 1) Démontrer que f_n est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-elle continue ?
- 2) a) Démontrer que : $\forall M \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|M\| \leq 1$.
b) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.
- 3) Justifier l'existence d'une matrice A_n appartenant à $O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}) \quad f_n(M) \leq f_n(A_n).$$

Le but du problème est de déterminer un équivalent de $f_n(A_n)$ quand n tend vers l'infini.

Partie I

Dans cette partie n est fixé. On désigne par $A_{n1}, \dots, A_{nn}$ les colonnes de la matrice A_n et l'on note :

$$A_n = [A_{n1}, \dots, A_{nn}].$$

On fixe deux indices i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$ et l'on désigne par B_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont égales à $B_{n1}, \dots, B_{nn}$ avec :

$$\begin{aligned} B_{nk} &= A_{nk} \text{ si } k \text{ est différent de } i \text{ et de } j \\ B_{ni} &= (\cos t) \cdot A_{ni} - (\sin t) \cdot A_{nj} \\ B_{nj} &= (\sin t) \cdot A_{ni} + (\cos t) \cdot A_{nj} \end{aligned}$$

- 1) Démontrer que la matrice B_n appartient à $O_n(\mathbb{R})$.
- 2) Déterminer deux réels λ et μ tels que :
$$f_n(A_n) - f_n(B_n) = \lambda \cdot (1 - \cos t) + \mu \cdot \sin t.$$
- 3) Grâce à un développement limité de l'expression précédente quand t tend vers 0, démontrer que $\mu = 0$.
En notant $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, en déduire que :

$$\sum_{k=1}^i a_{k,j} = \sum_{k=1}^j a_{k,i}.$$

Pour toute la suite du problème, le nombre réel précédent est noté $\sigma_{i,j}$.

Partie II

On désigne par C_n la matrice carrée d'ordre n telle que $c_{i,j} = 0$ si $i < j$ et $c_{i,j} = 1$ si $i \geq j$:

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On désigne par J_n la matrice carrée d'ordre n dont la sous-diagonale est formée de 1 et tous les autres coefficients sont nuls :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) a) Exprimer C_n sous la forme d'un polynôme en J_n .
 b) Montrer que C_n est inversible et que $C_n^{-1} = I_n - J_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n .
- 2) a) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_n(M) = \text{Tr}(C_n M)$.
 b) Montrer que $C_n A_n = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. En déduire que $C_n A_n$ est une matrice symétrique.
- 3) On pose $U_n = {}^t C_n^{-1} A_n$.
 a) Démontrer que la matrice U_n est symétrique.
 b) Montrer que $f_n(A_n) = \text{Tr}(U_n^{-1})$.
- 4) On pose $V_n = U_n^2$. Montrer que V_n est la matrice carrée d'ordre n telle que la diagonale est formée de 2, sauf le dernier élément qui vaut 1, la sur-diagonale et la sous-diagonale sont formées de -1 et les autres coefficients sont nuls :

$$V_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie III

- 1) On désigne par P_n le polynôme caractéristique de V_n :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = \det(x.I_n - V_n)$$
 On pose $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - 1$. Montrer que :

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = (x - 2)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$
- 2) Soit $\theta \in [0, \pi/2[$. On pose $x = 4 \sin^2 \theta$. Montrer que :

$$P_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos \theta}.$$
- 3) En déduire les racines du polynôme P_n , puis les valeurs absolues des valeurs propres de la matrice U_n^{-1} .
- 4) a) Justifier que U_n^{-1} est diagonalisable et que U_n^{-1} peut s'écrire PDP^{-1} , où P est une matrice orthogonale et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

b) On suppose que certains d_k sont négatifs. Soit $D' = \text{diag}(|d_1|, \dots, |d_n|)$.

On définit la matrice A' par $C_n A' = P D' P^{-1}$.

(i) Vérifier que $\text{Tr}(C_n A') > \text{Tr}(C_n A_n)$.

(ii) Montrer que A' est orthogonale.

(iii) Conclure.

5) En déduire que $f_n(A_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$.

Partie IV

On pose $\phi(t) = \frac{1}{\sin t}$ et $h = \frac{\pi}{2(2n+1)}$, de sorte que, d'après **III-5**,

$$2f_n(A_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi((2k+1)h).$$

1) Montrer que :

$$\int_h^{(2n+1)h} \phi(t) dt \leq 4hf_n(A_n) \leq 2h\phi(h) + \int_h^{(2n-1)h} \phi(t) dt.$$

2) Déterminer un équivalent quand h tend vers 0 de $\int_h^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$.

3) Déterminer un équivalent de $f_n(A_n)$ quand n tend vers l'infini.

Problème B

On étudie dans ce problème la fonction de la variable réelle u , $F : u \mapsto \int_0^1 x^{-u} \sqrt{1+x} dx$.

Partie I – Étude des variations de F

1) Montrer que l'ensemble de définition de F est $\Delta =]-\infty, 1[$ et que F est croissante sur Δ .

2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ (on ne cherchera pas à expliciter F').

3) a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, on a : $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1+x$.

En déduire un encadrement de $F(u)$, pour $u \in \Delta$.

b) Déterminer $\lim_{u \rightarrow 1^-} F(u)$ et un équivalent de $F(u)$ quand u tend vers 1^- .

4) a) Déterminer $\lim_{u \rightarrow -\infty} F(u)$.

b) Montrer que, pour tout u de Δ , on a :

$$F(u) = \frac{\sqrt{2}}{1-u} - \frac{1}{2(1-u)} G(u) \quad \text{où} \quad G(u) = \int_0^1 \frac{x^{1-u}}{\sqrt{1+x}} dx.$$

c) Déterminer $\lim_{u \rightarrow -\infty} G(u)$, puis un équivalent de $F(u)$ quand u tend vers $-\infty$.

5) Supposant $u < 0$, établir une relation entre $F(u)$ et $F(u+1)$. Calculer $F(0)$, $F(-1)$.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormal.

Partie II – Développement en série entière de F

- 1) On fixe pour cette question $u \in]-1, 1[$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $[0, 1]$ la fonction v_n par :

$$v_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1] \quad v_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x}} (-u \ln x)^n$$

et l'on pose

$$b_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} (-\ln x)^n dx.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ et en déduire que :

$$G(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n \quad (\text{la fonction } G \text{ a été définie au I - 4)).$$

- 2) En déduire qu'il existe une suite (a_n) de nombres réels tels que

$$\forall u \in]-1, 1[\quad F(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$$

et exprimer les coefficients a_n au moyen des coefficients b_n .

Itération de Manson

Il ne faut jamais hésiter à refaire plusieurs fois un calcul.

Si le résultat change à chaque fois, c'est que vous avez commis toute une série d'erreurs successives. En général, à chaque itération vous parviendrez à identifier la faute commise au calcul précédent.

Si au contraire vous trouvez toujours la même chose, c'est que vous faites une fixation sur une seule erreur, indétectable celle-là.